

ЗАНИМАТЕЛЬНАЯ МАТЕМАТИКА

МАНТА

ПРОИЗВОДНЫЕ И ИНТЕГРАЛЫ

Хироюки Кодзима
Син Тогами
Becom Co.

ЗАНИМАТЕЛЬНАЯ МАТЕМАТИКА
ПРОИЗВОДНЫЕ И ИНТЕГРАЛЫ
МАНТА



Хироюки Кодзима
Син Тогами
Becom Co.



OHM
Ohmsha

ОДЭКА

DMK
издательство

Занимательная математика
Производные и интегралы

Манга

マンガでわかる

微分積分

小島寛之 著
十神 真 作画
ビーコム 制作



ОБРАЗОВАТЕЛЬНАЯ МАНГА

ЗАНИМАТЕЛЬНАЯ МАТЕМАТИКА ПРОИЗВОДНЫЕ И ИНТЕГРАЛЫ

Хироюки Кодзима

Син Тогами

Перевод

Анненковой Е. А.



ДМК
ПРЕСС
ИЗДАТЕЛЬСТВО

ОДЭКА

Москва
Додэка, ДМК Пресс, 2015

УДК 517
ББК 22.161.6
К57

Кодзима, Хироюки.

К57 Занимательная математика. Производные и интегралы / Хироюки Кодзима, Син Тогами ; пер. Анненковой Е. А. — М. : ДМК Пресс, 2015. — 240 с. : ил. — (Образовательная манга). — Доп. тит. л. яп. — ISBN 978-5-97060-154-9.

I. Тогами, Син.

II. Анненкова, Е. А., пер.

Норико — начинающий репортёр. После обучения её направили в одно из отделений газеты «Асагакэ Таймс». Норико жаждет освещать в своих репортажах самые волнующие проблемы мировой политики и экономики, но хватит ли ей для этого опыта и знаний? Её непосредственный начальник, Сэки-сан, решил научить её анализировать происходящие в политике и экономике события используя математику.

Читая эту книгу, вы вместе с Норико будете осваивать основы дифференциального и интегрального исчисления и поймёте, что эти знания пригодятся не только для проведения сложных научных расчётов. Приводя примеры из реальной жизни, такие как вероятность событий, кривые спроса и предложения в экономике, загрязнение окружающей среды и даже плотность распределения спирта в стакане, автор показывает, что производные и интегралы помогают глубже разобраться в самых разных проблемах, возникающих в нашей жизни.

В ходе обучения вы узнаете:

- что такое производная и как с её помощью определять скорость изменения функции;
- как связаны между собой производная и интеграл;
- как интегрировать и дифференцировать сложные функции;
- что такое частные производные, и как с их помощью находить интегралы и производные функций нескольких переменных;
- как с помощью разложения в ряд Тейлора можно заменить трудную для анализа функцию степенным многочленом.

Книга будет полезна учащимся старших классов школ, студентам вузов, а также всем, кто интересуется математикой и хочет, чтобы обучение было лёгким и увлекательным.

УДК 517
ББК 22.161.6

Все права защищены. Никакая часть этого издания не может быть воспроизведена в любой форме или любыми средствами, электронными или механическими, включая фотографирование, ксерокопирование или иные средства копирования или сохранения информации, без письменного разрешения издательства.

Книга «Занимательная математика. Производные и интегралы» Хироюки Кодзимы и Сина Тогами подготовлена и издана по договору с Ohmsha Ltd.

ISBN 978-4-274-06632-0 (яп.)

ISBN 978-5-94120-228-7 (Додэка)

ISBN 978-5-97060-107-5 (ДМК Пресс)

Copyright © 2005 by Hiroyuki Kojima and Becom Co.

© Перевод, Издательский дом «Додэка-XXI», 2011

© Издание, ДМК Пресс, 2015

ПРЕДИСЛОВИЕ

Есть некоторые вещи, подвластные только манге*.

Если вы открыли эту книгу, то вы принадлежите к одному из следующих типов людей:

Первые — те, кто просто любит мангу и думает: «Математические выкладки, описанные с помощью манги? Потрясающе!» Если вы принадлежите их числу, то немедленно отнесёте эту книгу на кассу — и не пожалеете. У этой манги очень привлекательные рисунки. И неудивительно: их нарисовал популярный художник манги Син Тогами, а сценарий написала Бэком Лтд. — компания, производящая настоящую мангу.

Вы можете возразить: «Манга, обучающая математике, не может быть интересной». На первый взгляд, это так. Когда в издательстве «Омша» (Ohmsha) меня попросили написать эту книгу, я почти отказался. Многие из так называемых «обучающих манг» разочаровывают. В них может быть огромное количество рисунков, но они не являются настоящей мангой. Но после того, как я увидел мангу «Омшы» (это была манга по статистике), я передумал. Её действительно было приятно читать. Издатель сказал, что моя книга будет такой же, поэтому я принял его предложение. Я и раньше часто думал, что мог бы лучше преподавать математику, используя мангу, так что это была хорошая возможность проверить мою идею. Я гарантирую, что чем большим фанатом манги вы являетесь, тем больше вам понравится эта книга. Так чего же вы ждёте? Сейчас же уесите её на кассу и покупайте!

Второй тип людей — это те, кто взял эту книгу с мыслями: «Хоть математика и внушает мне ужас и/или у меня на неё аллергия, манга может помочь мне её понять.» Если вы из их числа, то эта книга для вас. Она не просто объясняет дифференциальное и интегральное исчисление с помощью манги, но и сам способ объяснения основательно отличается от используемого в традиционных учебниках. Во-первых, книга даёт представление о том, что именно делает дифференциальное и интегральное исчисление и для чего оно нужно. Пока вы этого не поймёте, вы не сможете его правильно использовать. Вы просто окажетесь в жалком положении зазубривания формул и правил. Эта книга объясняет все формулы, основанные на идее приближения первого порядка, помогая вам визуализировать значение формул и с лёгкостью их понять. Благодаря этому уникальному методу обучения вы можете быстро и легко перейти от дифференцирования к интегрированию. Более того, я позаимствовал оригинальный метод объяснения дифференцирования и интегрирования тригонометрических и показательных функций, который не описывается в обычных учебниках, — обычно это остаётся какой-то тарабарщиной для многих людей даже после многократных объяснений. Эта книга также идёт дальше, объясняя даже разложение в ряд Тейлора и определение частной производной. Наконец, я привлёк трёх постоянных потребителей исчисления: физику, статистику и экономику, чтобы они составили часть этой книги, предоставив множество примеров практического применения дифференциального и интегрального исчисления. Благодаря всем этим уловкам вы сможете воспринимать исчисление не как трудную науку, а как полезный инструмент.

Я опять же подчеркну: всё это стало возможным благодаря манге. Почему при чтении манги вы можете получить больше информации, чем при чтении романа? Потому что манга — это визуальные данные, представленные в виде комиксов. Исчисление — это ветвь математики, описывающая динамические явления. Таким образом, изучение дифференциального и интегрального исчисления с помощью манги является отличной идеей. Теперь переверните страницу и наслаждайтесь красивой мангой по дифференцированию и интегрированию.

*Хироюки Кодзима
Ноябрь 2005*

* Манга — японские комиксы.

СОДЕРЖАНИЕ

Пролог.

ЧТО ТАКОЕ ФУНКЦИЯ	1
--------------------------------	---

Глава 1.

ДИФФЕРЕНЦИРУЕМ ФУНКЦИИ!	15
--------------------------------------	----

1.1. Аппроксимация функций	16
1.2. Относительная погрешность	27
1.3. Применение производных	32
1.4. Вычисление производной	39
1.5. Упражнения к главе 1	41

Глава 2.

ИЗУЧАЕМ ПРИЁМЫ ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЯ!	43
---	----

2.1. Производная суммы функций	48
2.2. Производная произведения функций	53
2.3. Дифференцирование многочленов	62
2.4. Нахождение максимумов и минимумов	64
2.5. Теорема о среднем	72
2.6. Производная частного от деления функций	74
2.7. Производная сложной функции	75
2.8. Производная обратной функции	75
2.9. Формулы для дифференцирования	76
2.10. Упражнения к главе 2	76

Глава 3.

ИНТЕГРИРУЕМ ФУНКЦИИ! 77

- 3.1. Найдём концентрацию спирта 82
- 3.2. Основная теорема интегрирования..... 91
- 3.3. Применение формул интегрирования 95
- 3.4. Применение основной теоремы интегрирования ... 101
- 3.5. Сводка по основной теореме интегрирования 110
- 3.6. Упражнения к главе 3 112

Глава 4.

ИЗУЧАЕМ ПРИЁМЫ ИНТЕГРИРОВАНИЯ! 113

- 4.1. Танцы и тригонометрические функции 114
- 4.2. Косинус и тень 120
- 4.3. Интегрирование тригонометрических функций 123
- 4.4. Показательная и логарифмическая функции 129
- 4.5. Обобщение показательной и логарифмической функций 133
- 4.6. Свойства показательной и логарифмической функций 138
- 4.7. Другие применения основных теорем 140
- 4.8. Упражнения к главе 4 142

Глава 5.

ИЗУЧАЕМ РАЗЛОЖЕНИЕ В РЯД ТЕЙЛОРА! 143

- 5.1. Асагакэ Таймс. Главный офис 144
- 5.2. Как получить разложение в ряд Тейлора 153
- 5.3. Разложение различных функций в ряд Тейлора 158
- 5.4. Что даёт Разложение в ряд Тейлора 159
- 5.5. Упражнения к главе 5 176

Глава 6.

ИЗУЧАЕМ ЧАСТНЫЕ ПРОИЗВОДНЫЕ!.....177

- 6.1. Функции нескольких переменных178
- 6.2. Линейные функции нескольких переменных182
- 6.3. Частные производные189
- 6.4. Полные дифференциалы195
- 6.5. Условия существования экстремумов197
- 6.6. Применение частных производных в экономике... 200
- 6.7. Частная производная сложной функции.
Цепное правило..... 204
- 6.8. Упражнения к главе 6216

Эпилог.

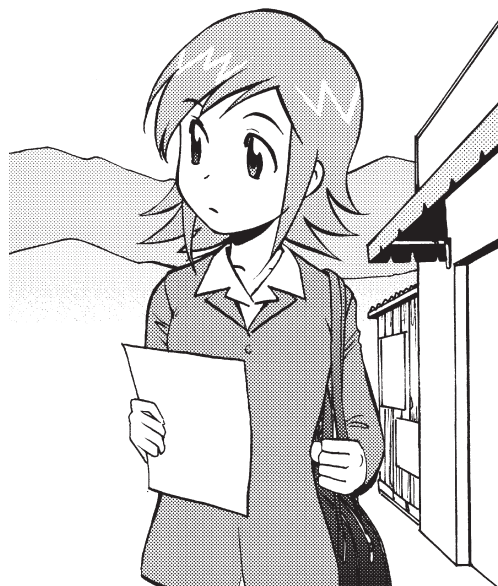
ЗАЧЕМ НУЖНА МАТЕМАТИКА?.....217

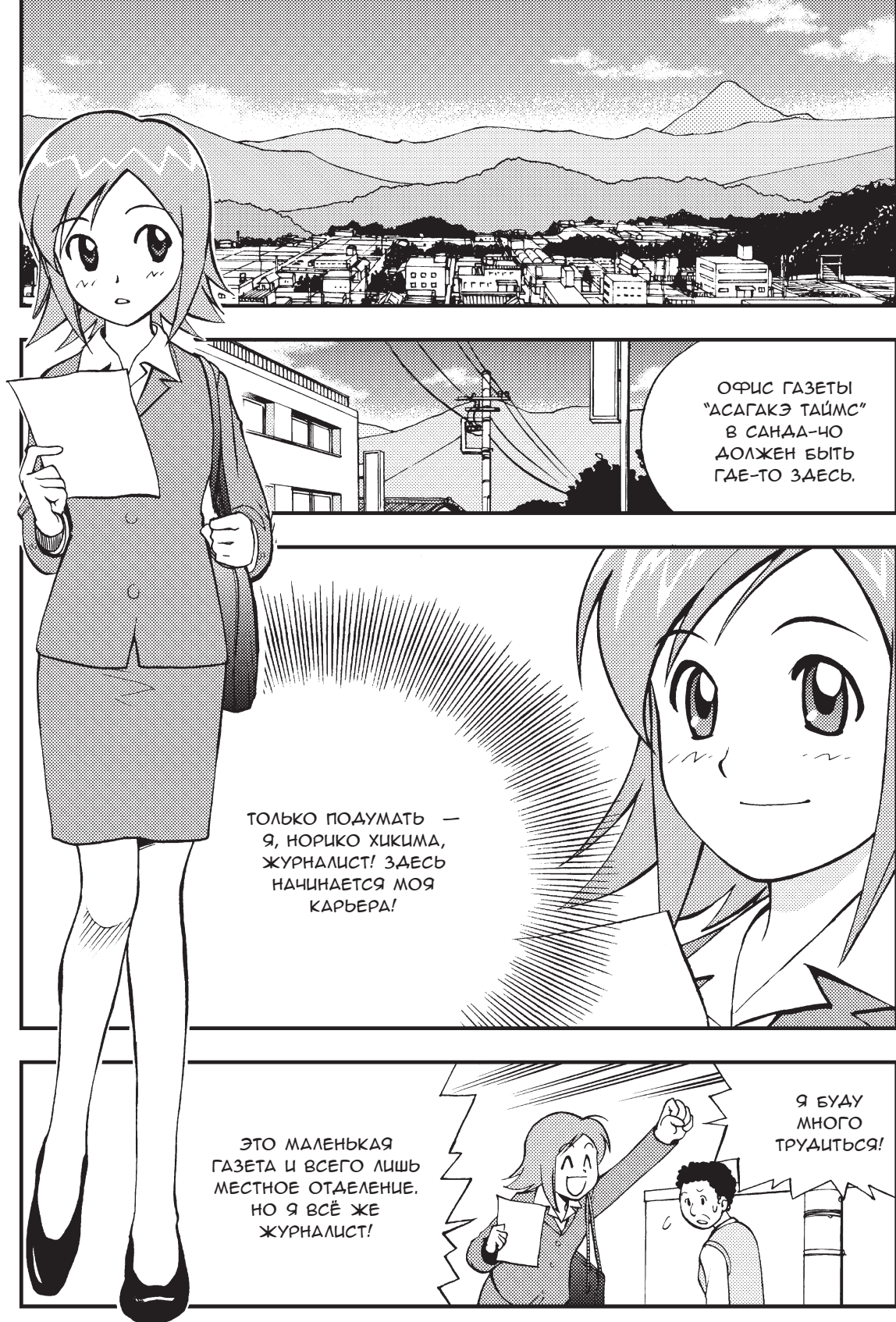
ПРИЛОЖЕНИЯ..... 223

- П.1. Решения к упражнениям 224
- П.2. Основные формулы, теоремы и функции 227
- П.3. Алфавитный перечень..... 230

ПРОЛОГ

ЧТО ТАКОЕ ФУНКЦИЯ



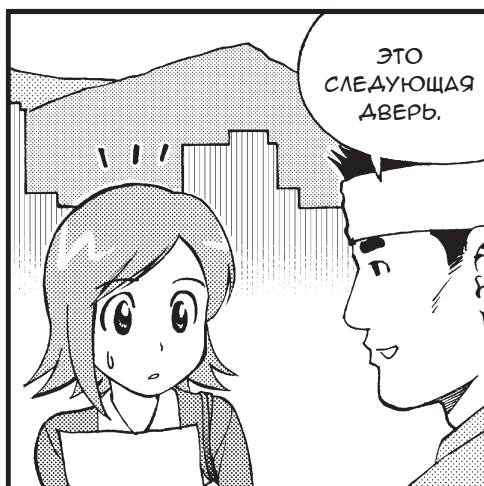


ОФИС ГАЗЕТЫ
"АСАГАКЭ ТАЙМС"
В САНДЭ-ЧО
ДОЛЖЕН БЫТЬ
ГДЕ-ТО ЗДЕСЬ.

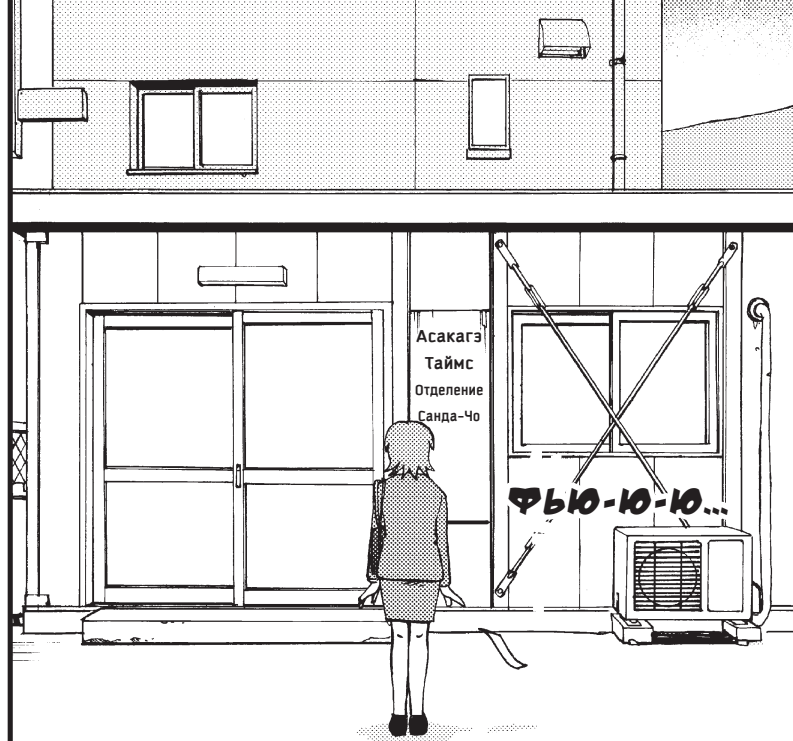
ТОЛЬКО ПОДУМАТЬ —
Я, НОРИКО ХИКИМА,
ЖУРНАЛИСТ! ЗДЕСЬ
НАЧИНАЕТСЯ МОЯ
КАРЬЕРА!

ЭТО МАЛЕНЬКАЯ
ГАЗЕТА И ВСЕГО ЛИШЬ
МЕСТНОЕ ОТДЕЛЕНИЕ.
НО Я ВСЁ ЖЕ
ЖУРНАЛИСТ!

Я БУДУ
МНОГО
ТРУДИТЬСЯ!



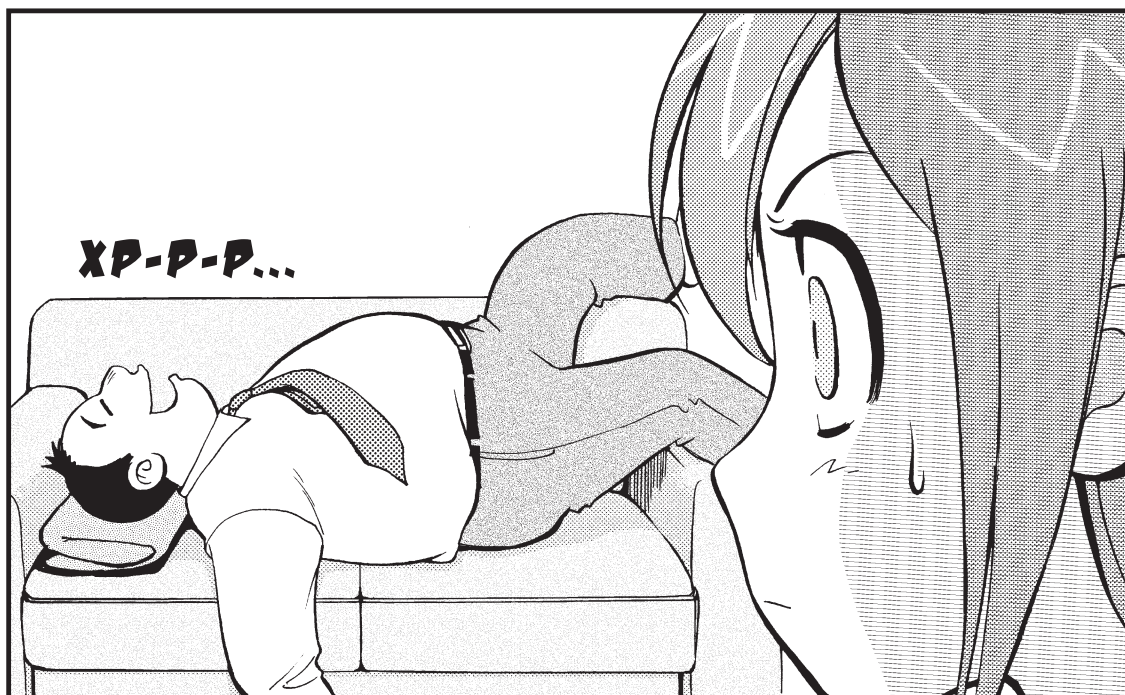
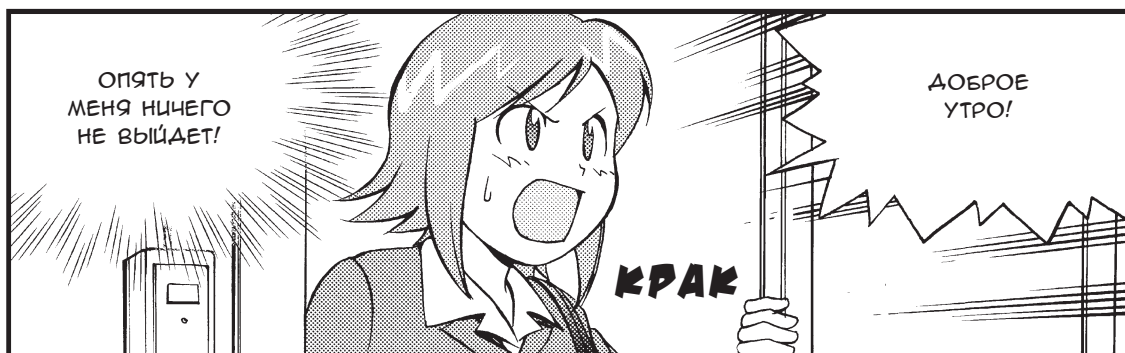
**Асакагэ
Таймс
Отделение
Санда-Чо**



О, НЕТ! ЭТО ЖЕ
СБОРНЫЙ ДОМИК!

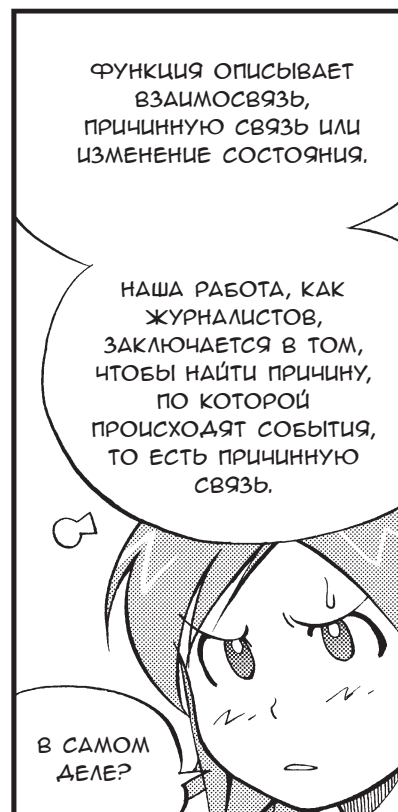
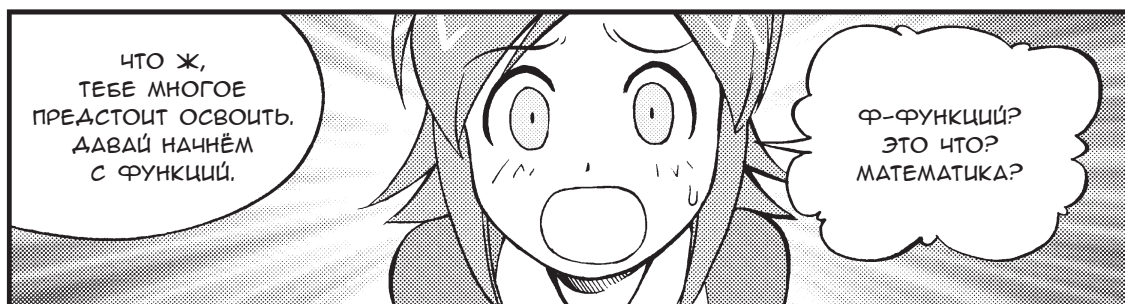
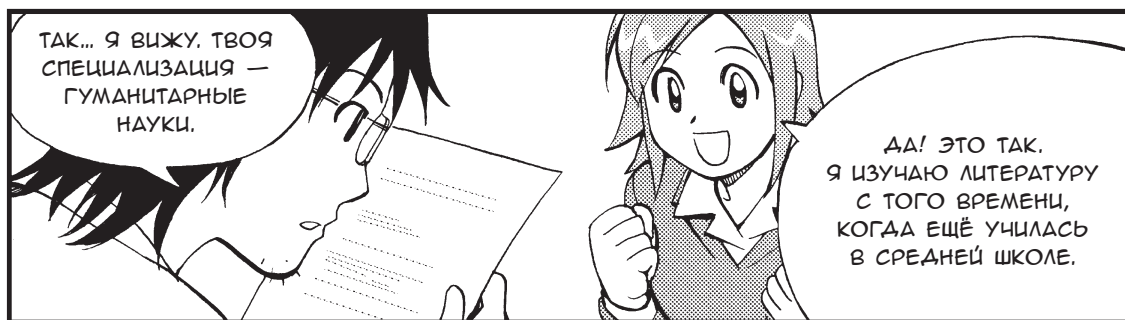
НЕ... НЕ
РАССТРАИВАЙСЯ,
НОРИКО.

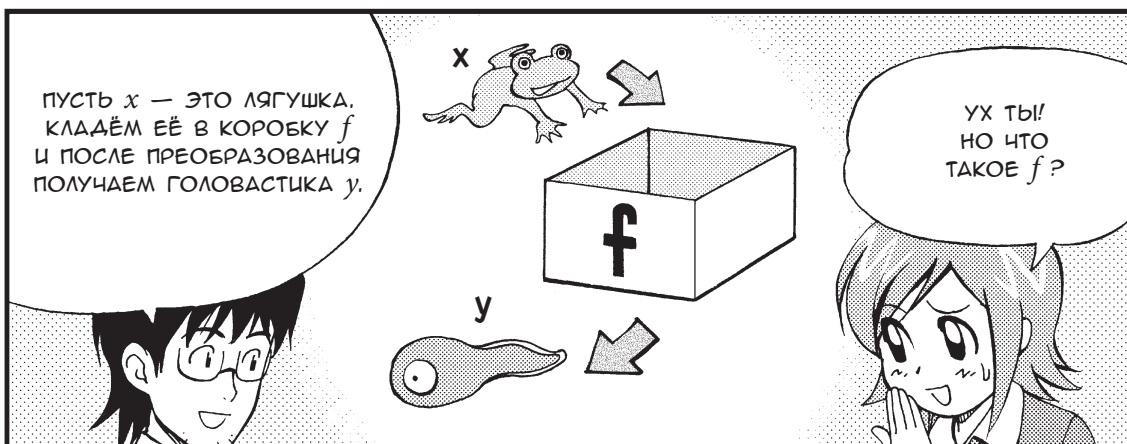
ЭТО — ВСЕГО ЛИШЬ
МЕСТНОЕ ОТДЕЛЕНИЕ,
НО ВСЁ ЖЕ ЭТО
ДЕЙСТВИТЕЛЬНО
АСАГАКЭ ТАЙМС.

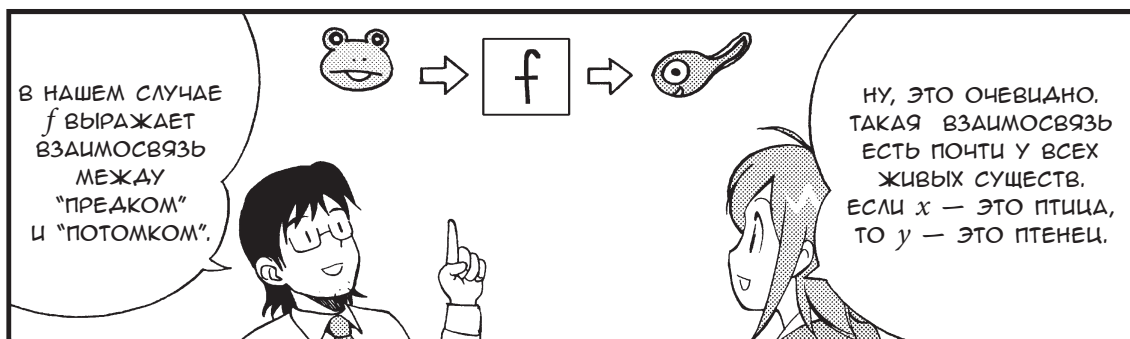


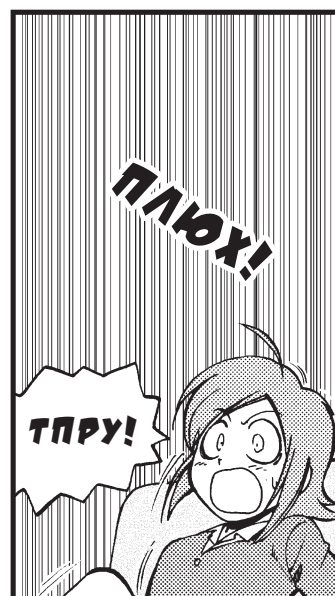
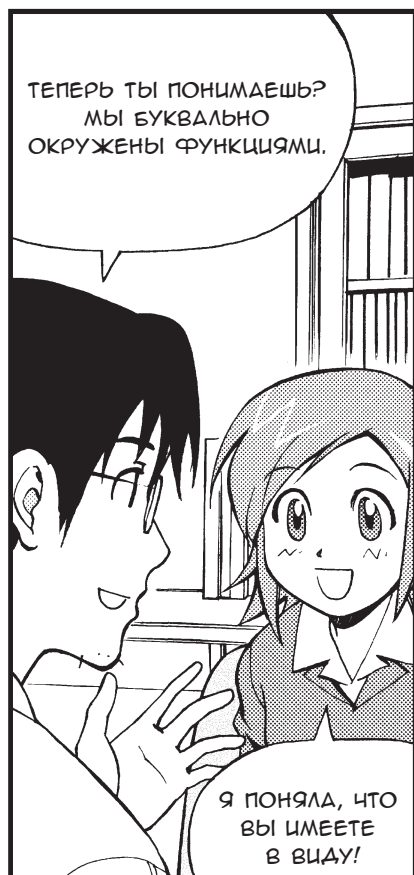


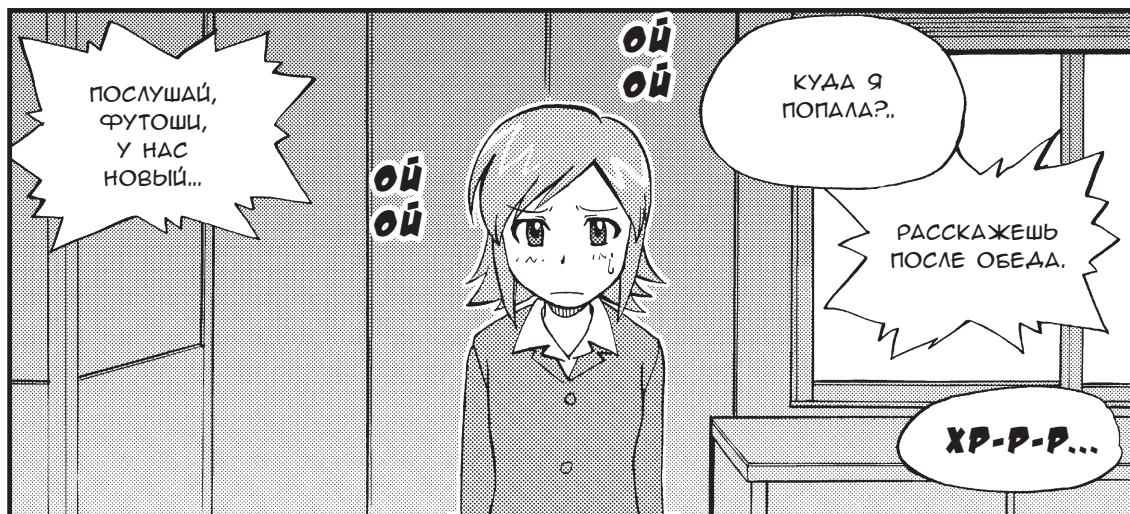
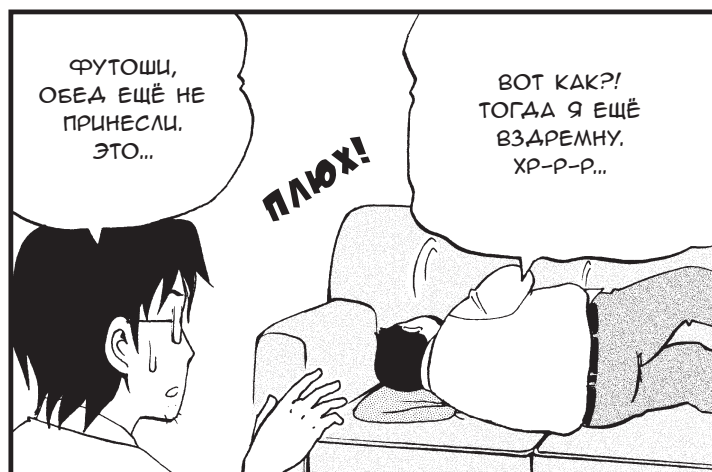
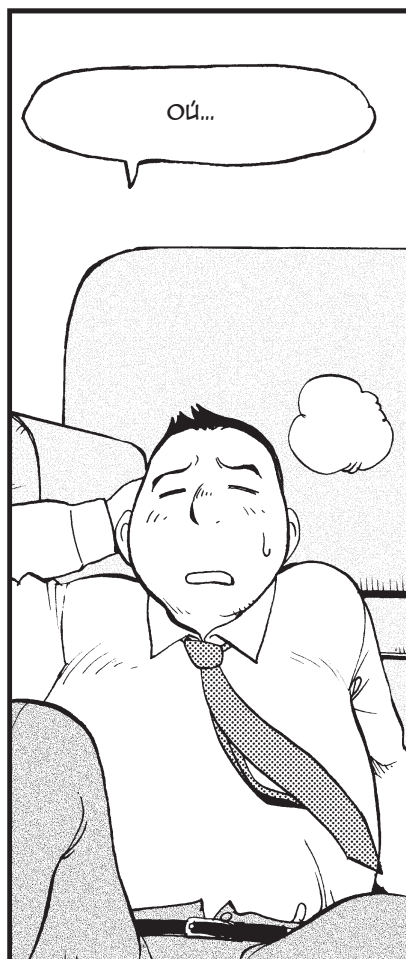




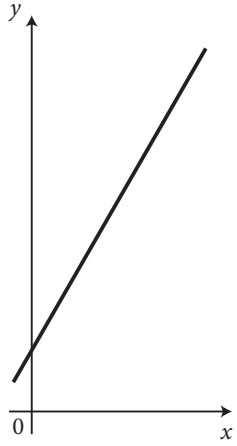
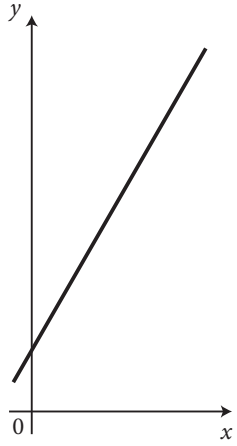
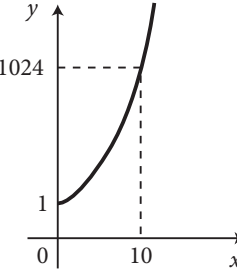




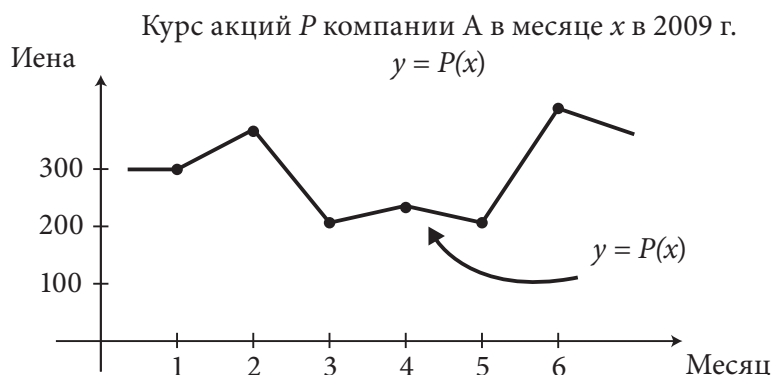
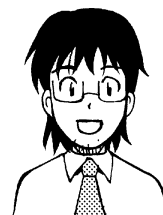




■ Таблица 1. Характеристики функций

Тема	Расчёт	График
Причин- ная связь	<p>Частота стрекотания сверчка определяется температурой. Можно приблизительно выразить связь между стрекотаниями сверчка в минуту (y) и температурой в градусах Цельсия (x) формулой</p> $y = g(x) = 7x - 30$ <p style="text-align: center;"> \uparrow \downarrow $x = 30^{\circ}\text{C}$ $7 \times 30 - 30$ </p> <p style="text-align: right;">Итого, 180 стрекотаний в минуту.</p>	<p>На графике такие функции изображаются прямой линией. Поэтому они и называются линейной функцией.</p> 
Измене- ния	<p>Скорость звука y в метрах в секунду (м/с) в воздухе при $x(^{\circ}\text{C})$ выражается в виде</p> $y = f(x) = 0,6x + 331.$ <p>При 15°C $y = f(15) = 0,6 \times 15 + 331 = 340$ м/с.</p> <p>При -5°C $y = f(-5) = 0,6 \times (-5) + 331 = 328$ м/с.</p>	
Переход к другой системе	<p>Перевод x градусов по Фаренгейту ($^{\circ}\text{F}$) в y градусы Цельсия ($^{\circ}\text{C}$):</p> $y = f(x) = \frac{5}{9}(x - 32).$ <p>То есть теперь мы знаем, что 50°F соответствуют</p> $\frac{5}{9}(50 - 32) = 10^{\circ}\text{C}.$	
	<p>Компьютеры выполняют операции с числами, используя бинарную систему счисления (1 и 0). Бинарное число, состоящее из x битов (или бинарных разрядов), может принимать y различных значений:</p> $y = b(x) = 2^x.$ <p>(Функцию вида $y = a^x$ называют показательной. Показательная функция рассмотрена на стр. 131.)</p>	<p>Так на графике выглядит показательная функция.</p> 

СУЩЕСТВУЮТ ФУНКЦИИ, ГРАФИКИ КОТОРЫХ НЕ МОГУТ БЫТЬ ИЗОБРАЖЕНЫ ГЛАДКИМИ КРИВЫМИ.



Зависимость $P(x)$ нельзя выразить известной функцией, но она всё же является функцией.

Если найдёте способ предсказать курс акций в июле, $P(7)$, вы сможете неплохо заработать.

ПРИМЕНЕНИЕ ОДНОЙ ФУНКЦИИ К РЕЗУЛЬТАТАМ ДРУГОЙ НАЗЫВАЕТСЯ "КОМПОЗИЦИЕЙ ФУНКЦИЙ", ИЛИ "СЛОЖНОЙ ФУНКЦИЕЙ", ЧТО ПОЗВОЛЯЕТ РАСШИРЯТЬ ДИАПАЗОН ПРИЧИННЫХ СВЯЗЕЙ.



У п р а ж н е н и я

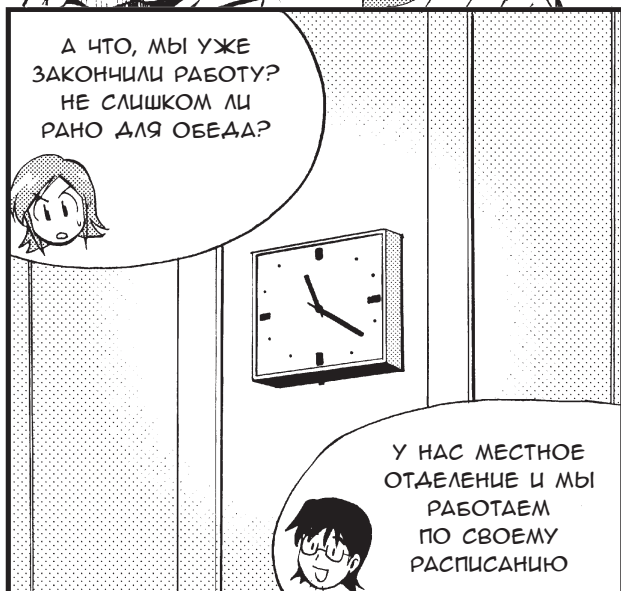
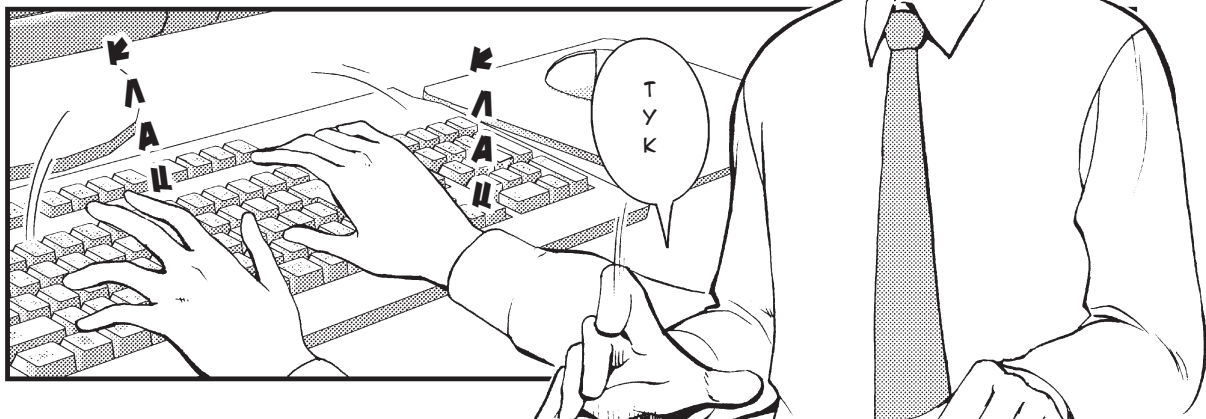
1. Найти уравнение, выражающее зависимость числа стрекотаний сверчка в минуту (z) от температуры в градусах Фаренгейта (x).

1

ДИФФЕРЕНЦИРУЕМ ФУНКЦИИ!



1.1. АППРОКСИМАЦИЯ ФУНКЦИЙ





Кому: редактору
Тема: новости дня

Медведь опять ворвался в жилой дом — пострадавших нет.

На территории префектуры увеличился спрос на арбузы.

И ВЫ ВСЕ ВРЕМЯ
ГОТОВИТЕ ТАКИЕ
ЗАМЕТКИ?



А ЧТО ПЛОХОГО
В МЕСТНЫХ
НОВОСТЯХ?
ЛЮДЯМ ЭТО
НРАВИТСЯ...

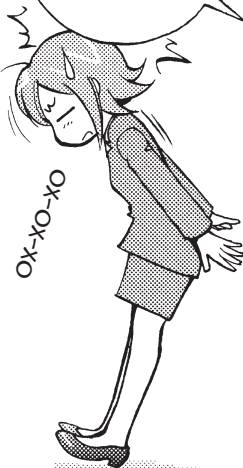


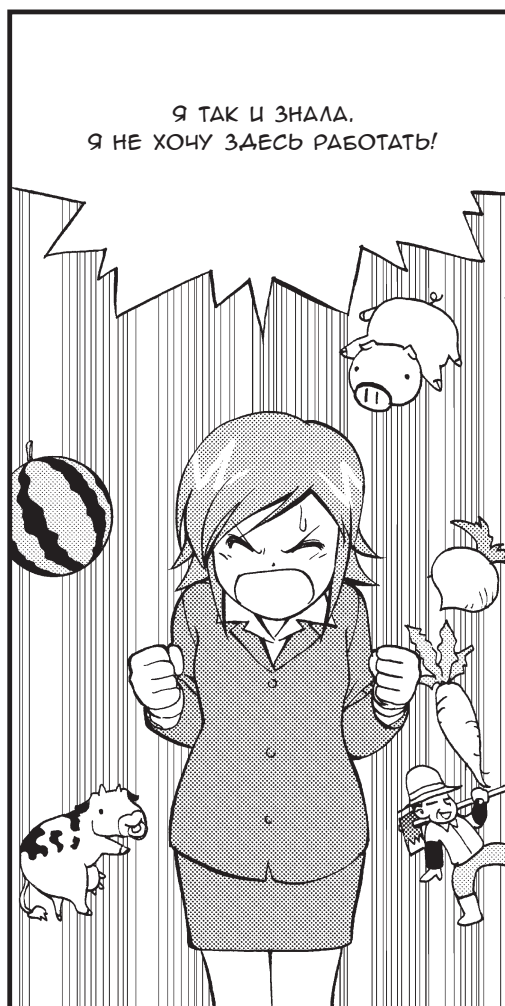
ПОЛИТИКА,
МЕЖДУНАРОДНЫЕ
ОТНОШЕНИЯ,
ЭКОНОМИКА...

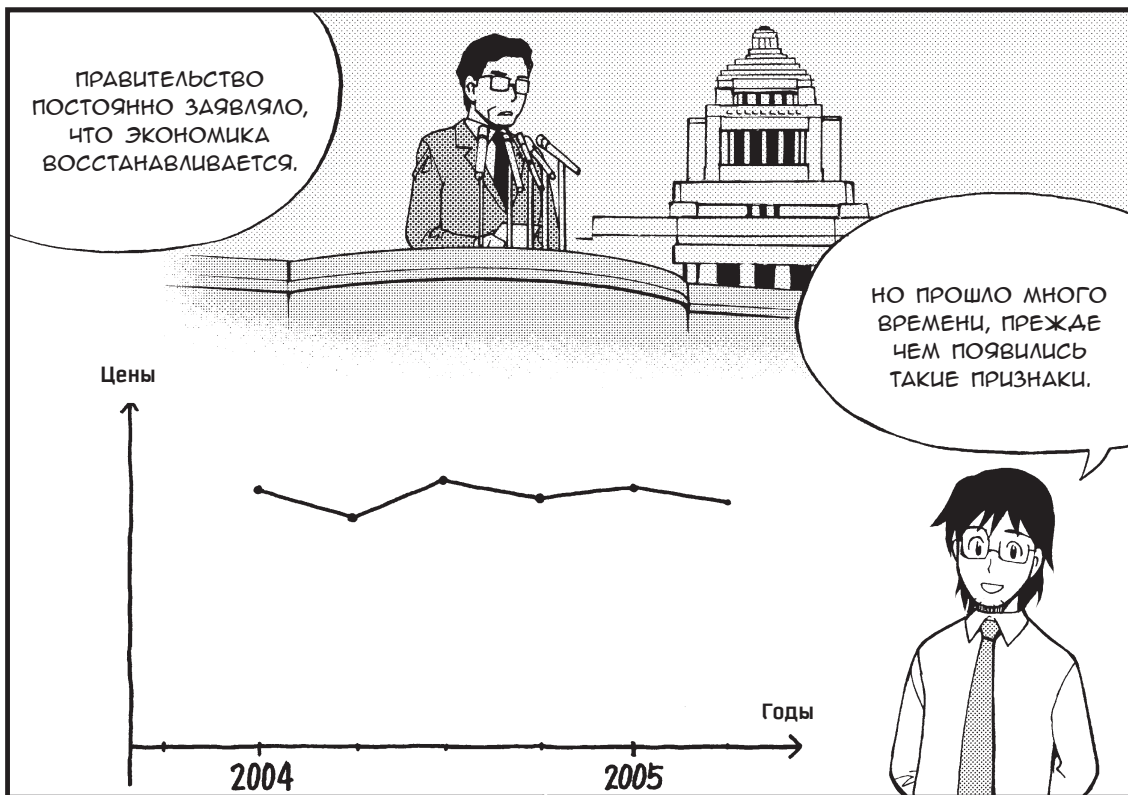
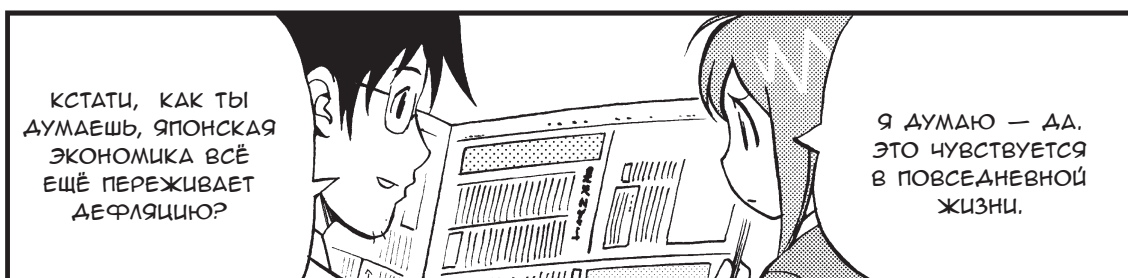
Я ХОЧУ ОСВЕЩАТЬ
ЯРКИЕ,
СЕНСАЦИОННЫЕ
СОБЫТИЯ!

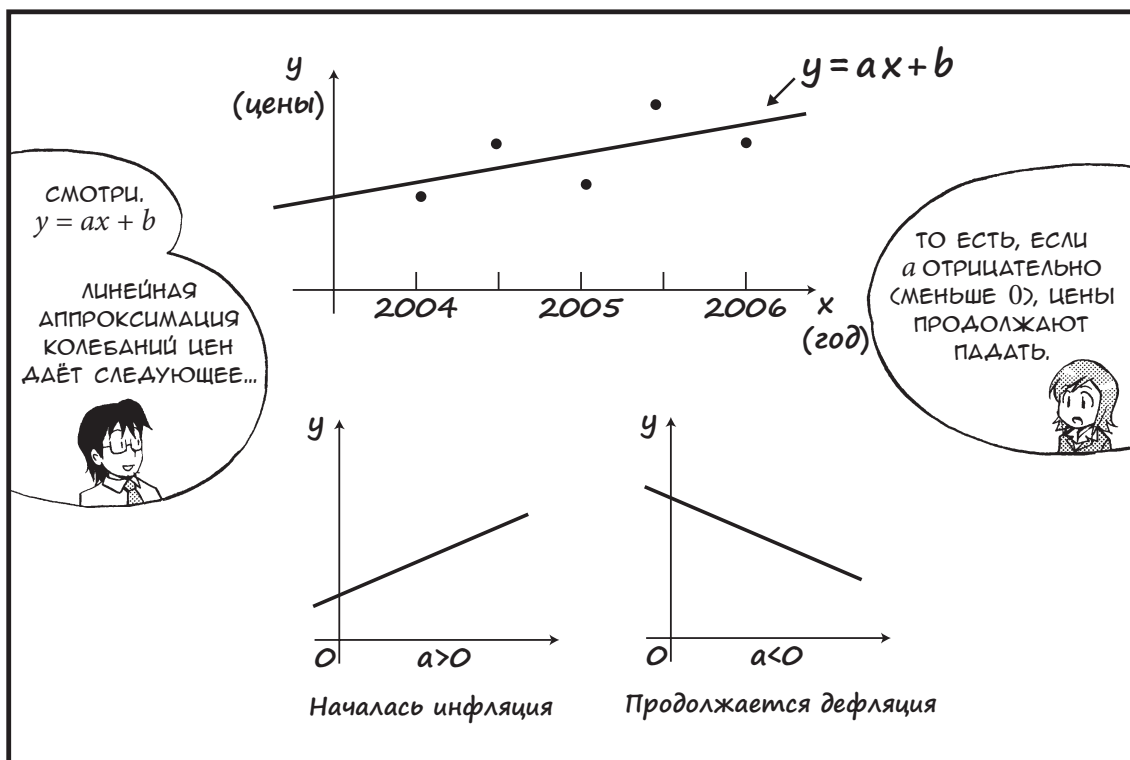


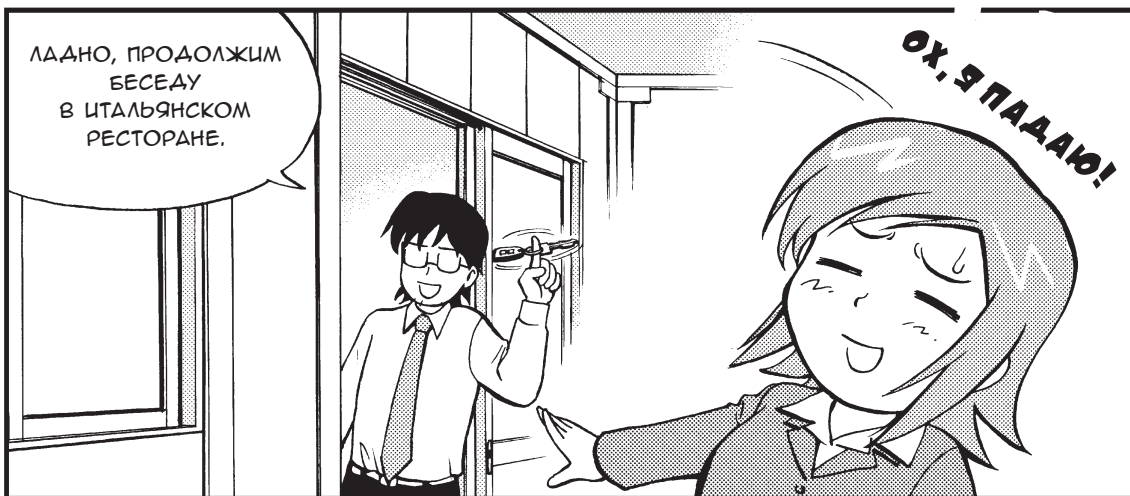
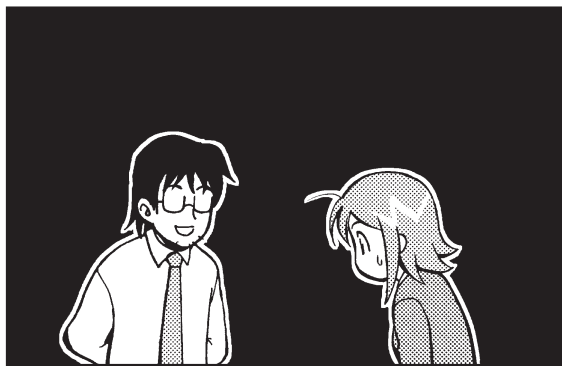
АХ,
НО ЗДЕСЬ ЭТО
НЕОСУЩЕСТ-
ВИМО.

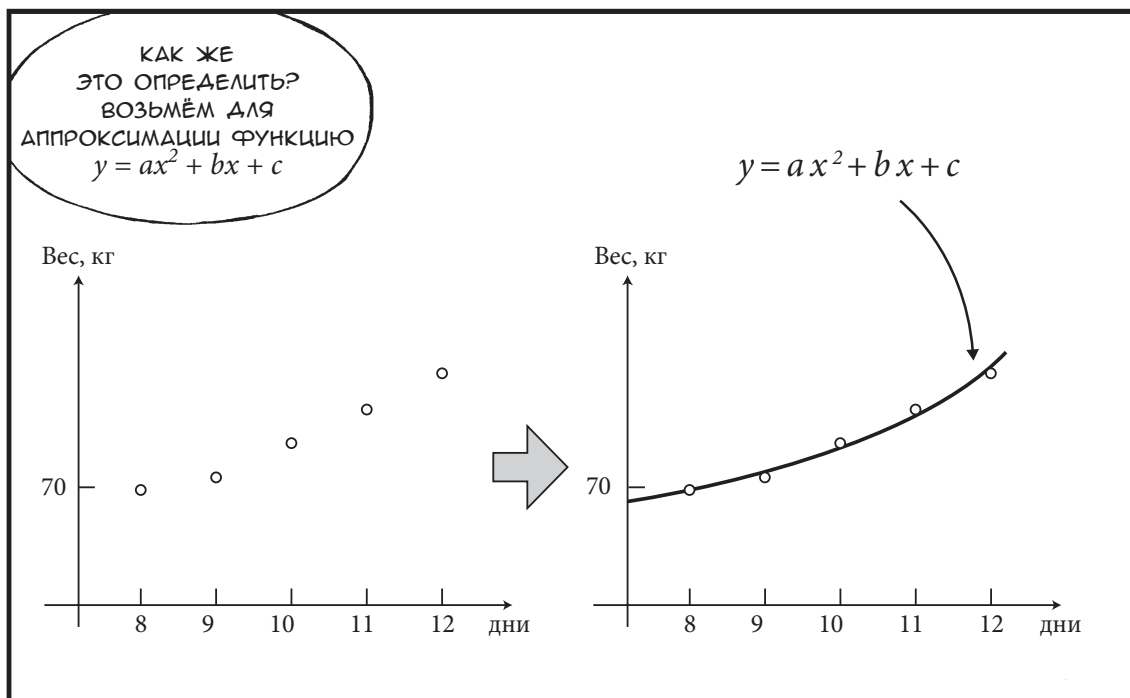
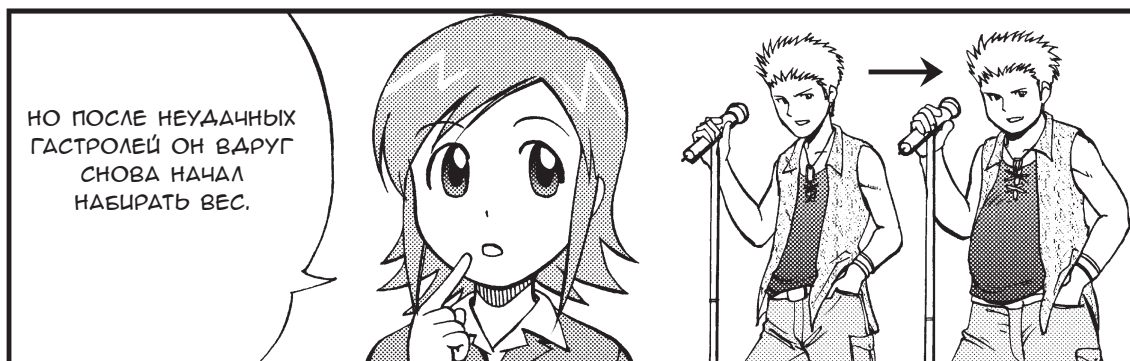


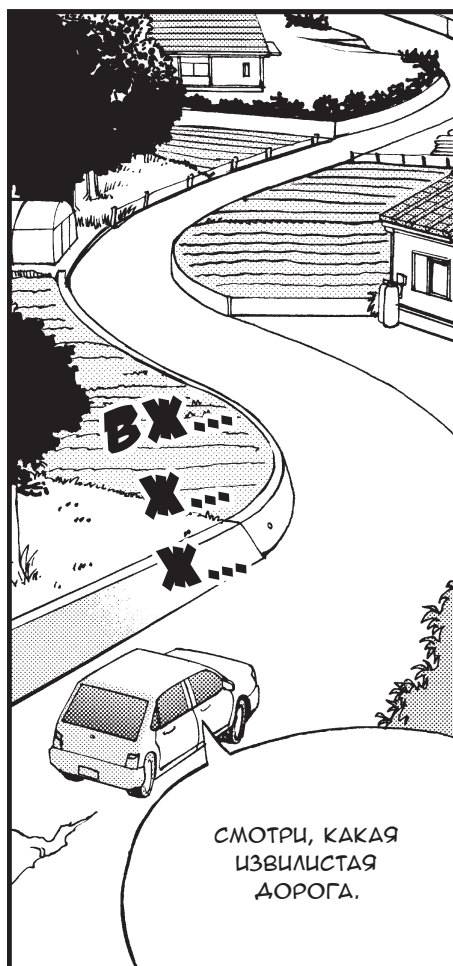
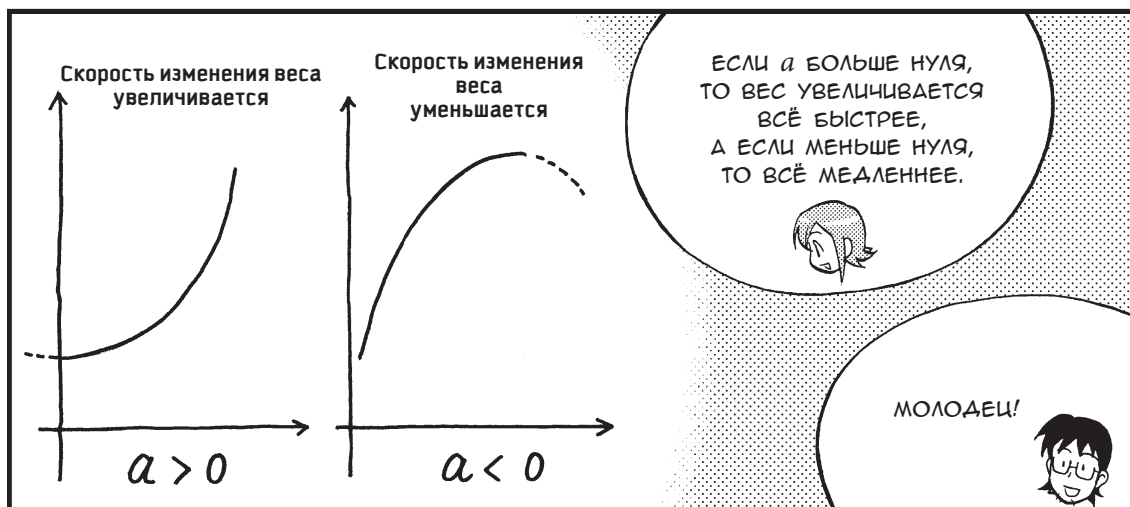


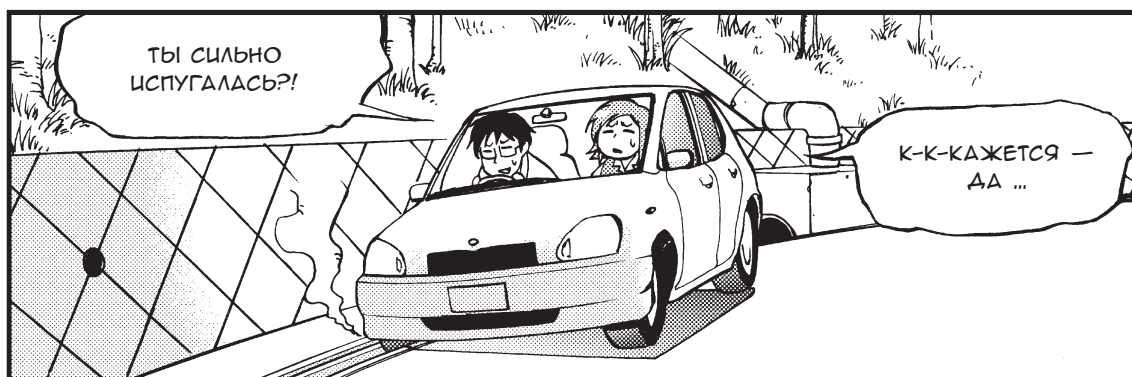


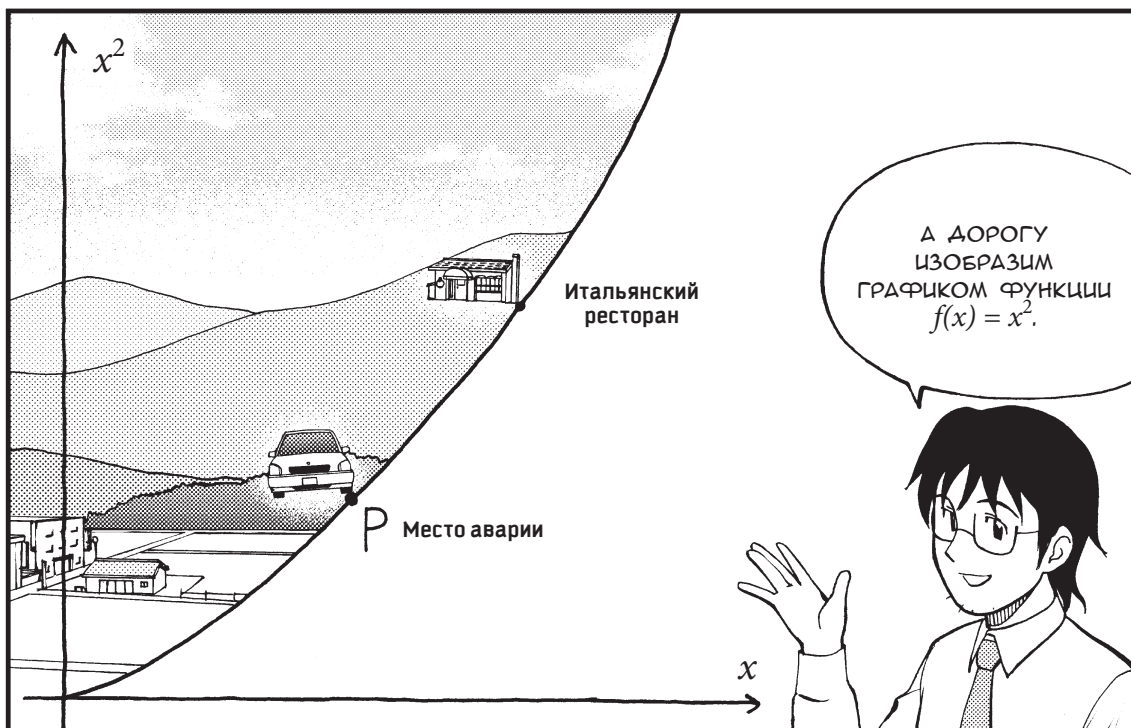
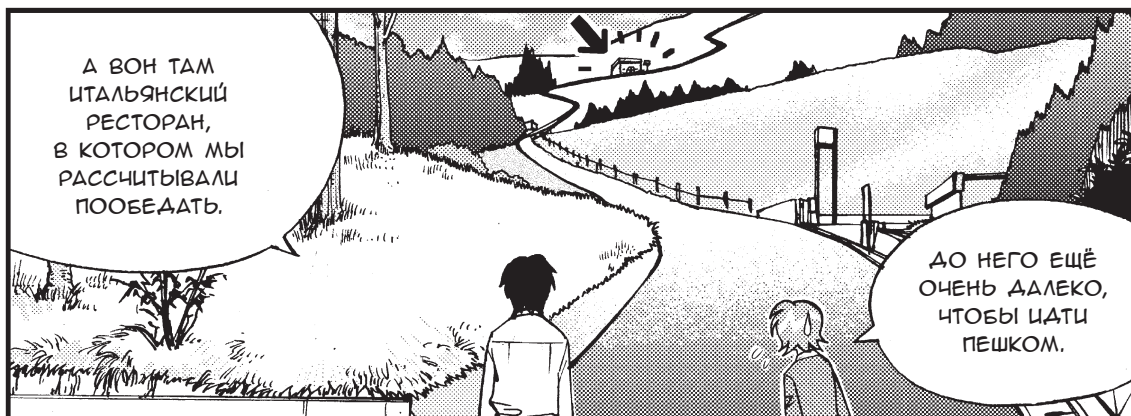


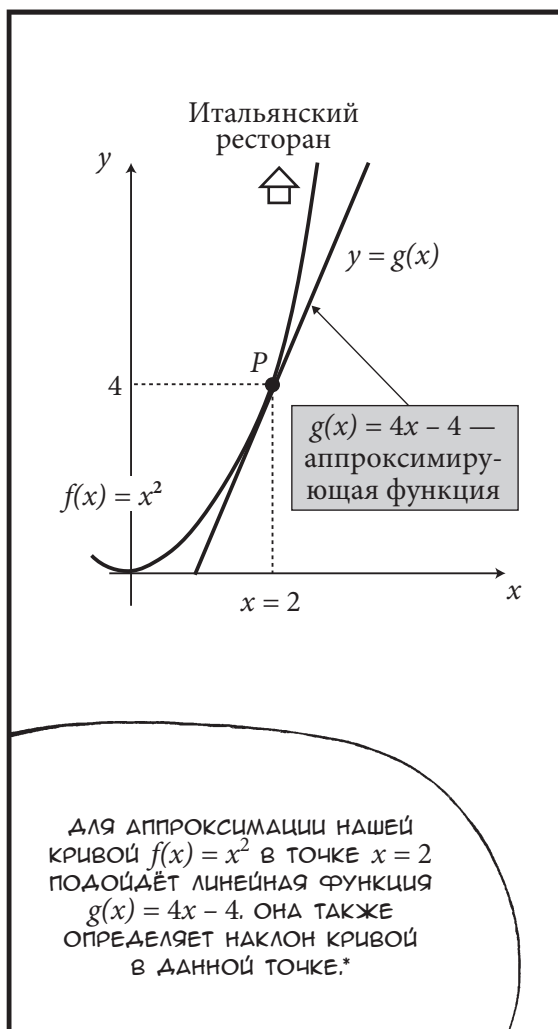






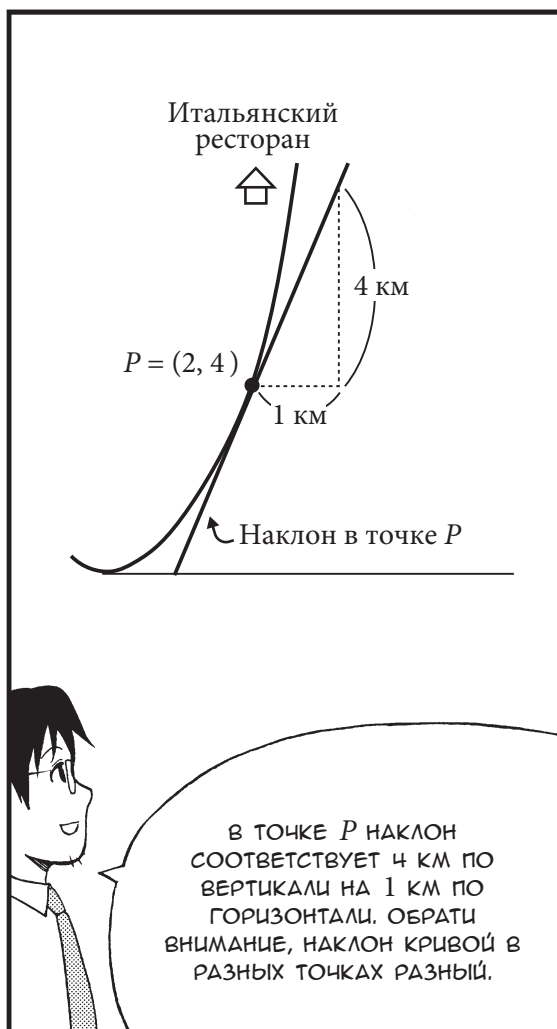




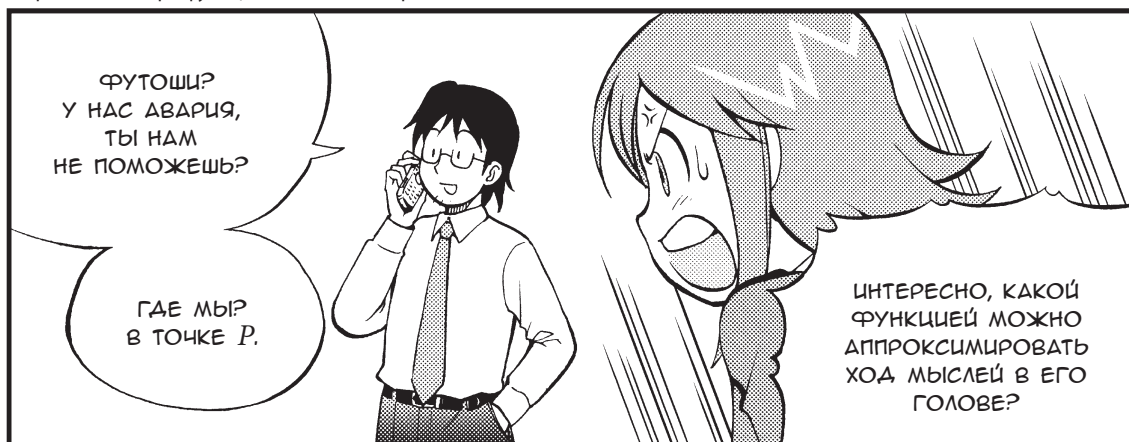


Для аппроксимации нашей кривой $f(x) = x^2$ в точке $x = 2$ подходит линейная функция $g(x) = 4x - 4$. Она также определяет наклон кривой в данной точке.*

* Правило выбора функции описано на стр. 39.



В точке P наклон соответствует 4 км по вертикали на 1 км по горизонтали. Обратите внимание, наклон кривой в разных точках разный.



1.2. ОТНОСИТЕЛЬНАЯ ПОГРЕШНОСТЬ



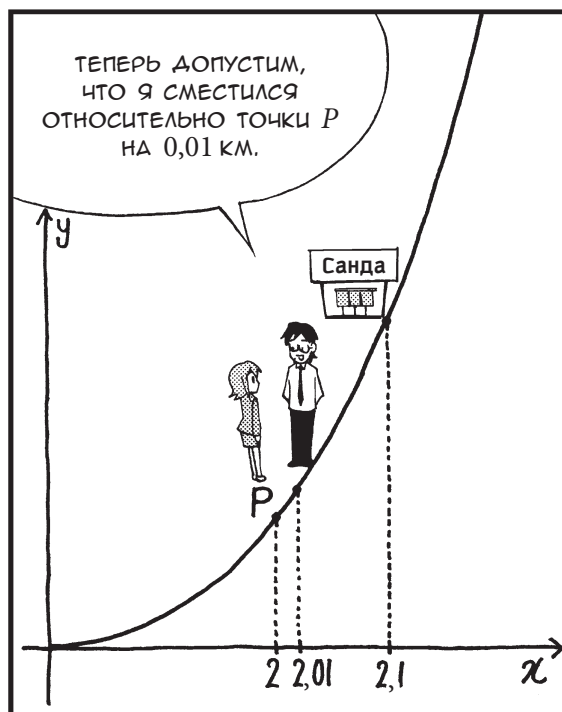
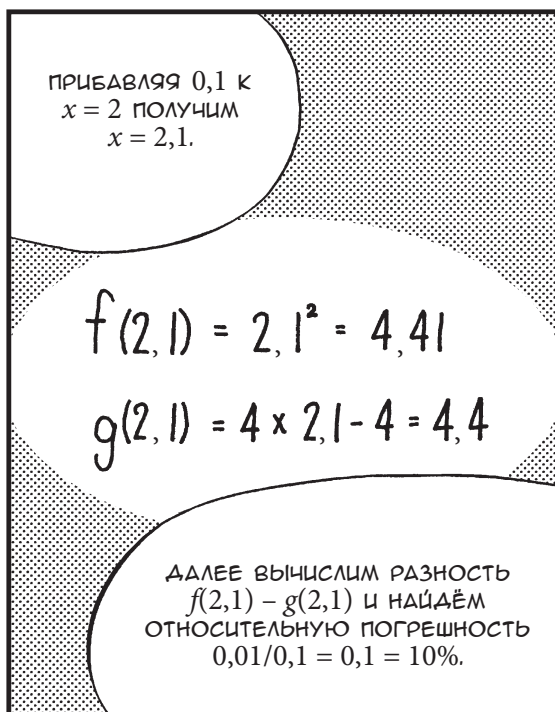
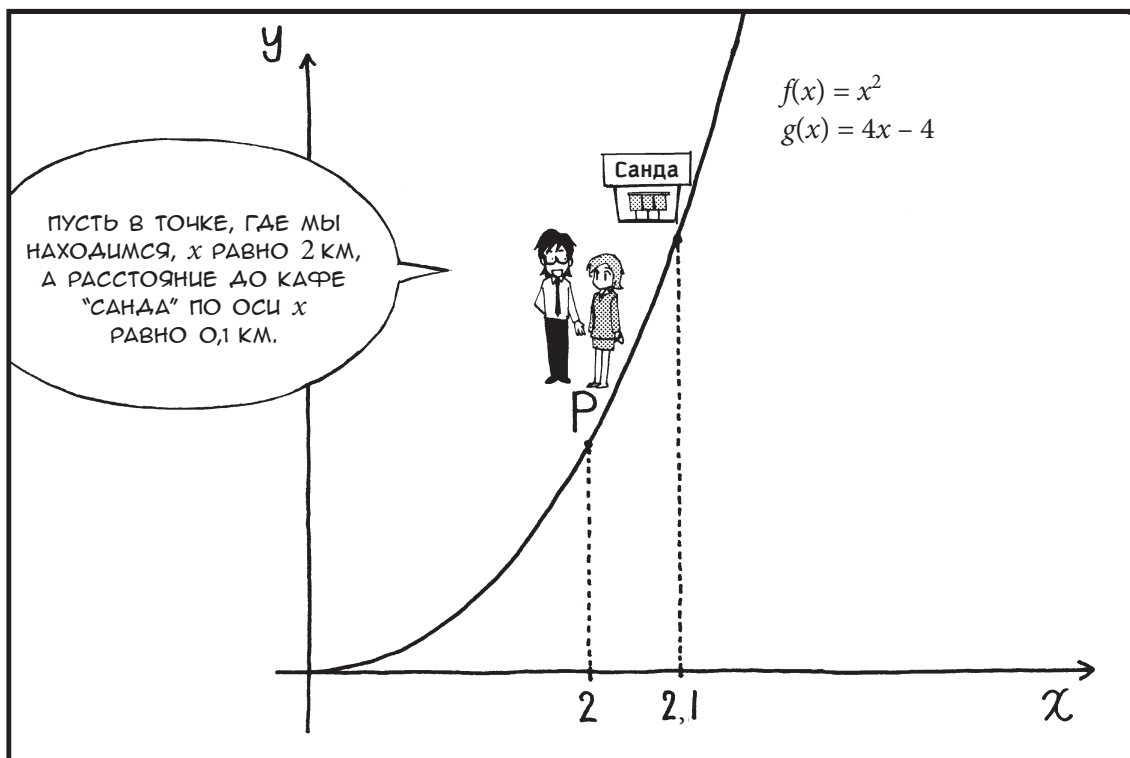
Исходная
функция

Аппроксимирующая
функция

Относительная погрешность = $\frac{\text{Разность между } f(x) \text{ и } g(x)}{\text{Приращение } x}$.

... ДОВОЛЬНО ПРОСТО!?





ПРИБАВЛЯЯ 0,01 К $x = 2$,
ПОЛУЧАЕМ $x = 2,01$.

Погрешность

$$f(2,01) - g(2,01) = 4,0401 - 4,04 = 0,0001$$

Относительная
погрешность

$$\frac{0,0001}{0,01} = 0,01$$

или 1 %

ТО ЕСТЬ ОТНОСИ-
ТЕЛЬНАЯ ПОГРЕШНОСТЬ
ОКАЗАЛАСЬ МЕНЬШЕ,
ЧЕМ ДЛЯ МЕСТА,
ГДЕ РАСПОЛОЖЕНО
КАФЕ "САНДА".

ДРУГИМИ СЛОВАМИ,
ДЛЯ НАШЕГО СЛУЧАЯ
ЧЕМ БЛИЖЕ ТЕКУЩАЯ
ТОЧКА К ТОЧКЕ АВАРИИ,
ТЕМ ЛУЧШЕ ФУНКЦИЯ
 $g(x)$ АППРОКСИМИРУЕТ
ФУНКЦИЮ $f(x)$.

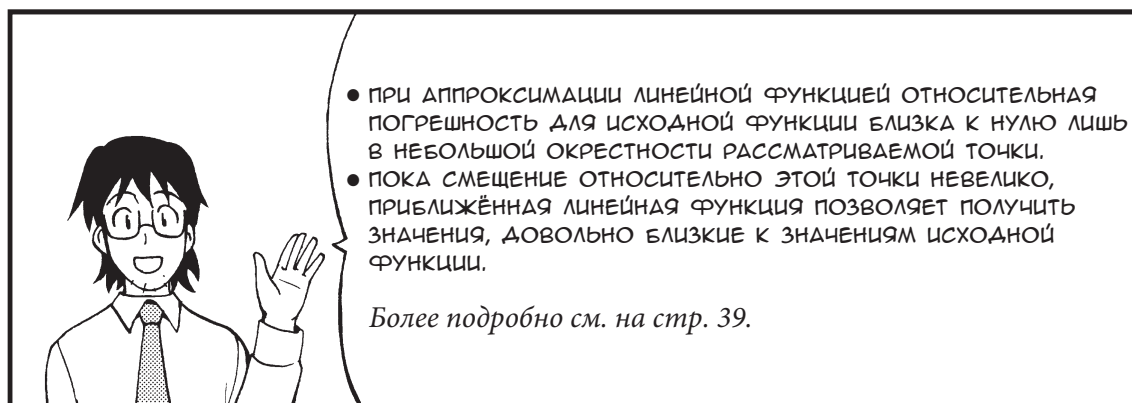
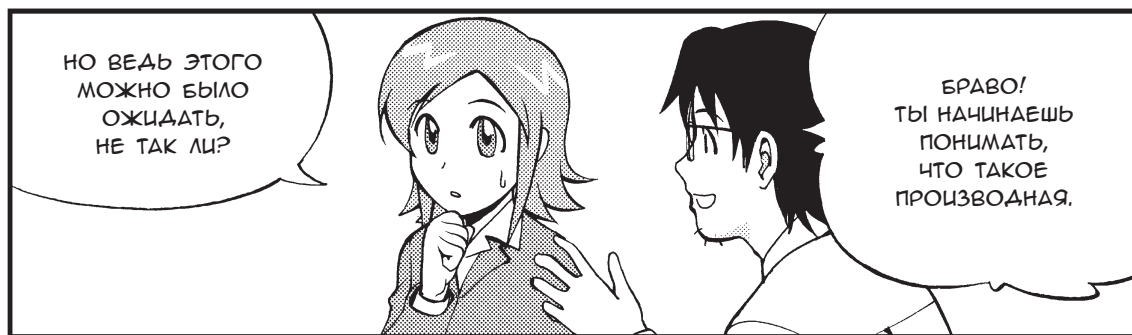


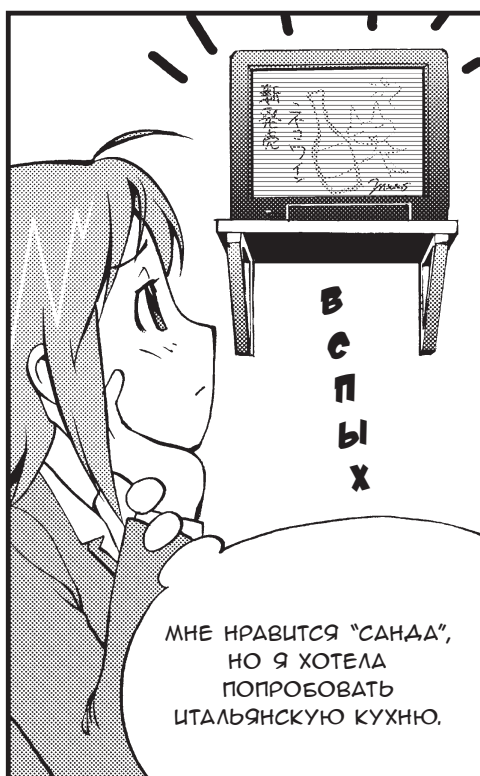
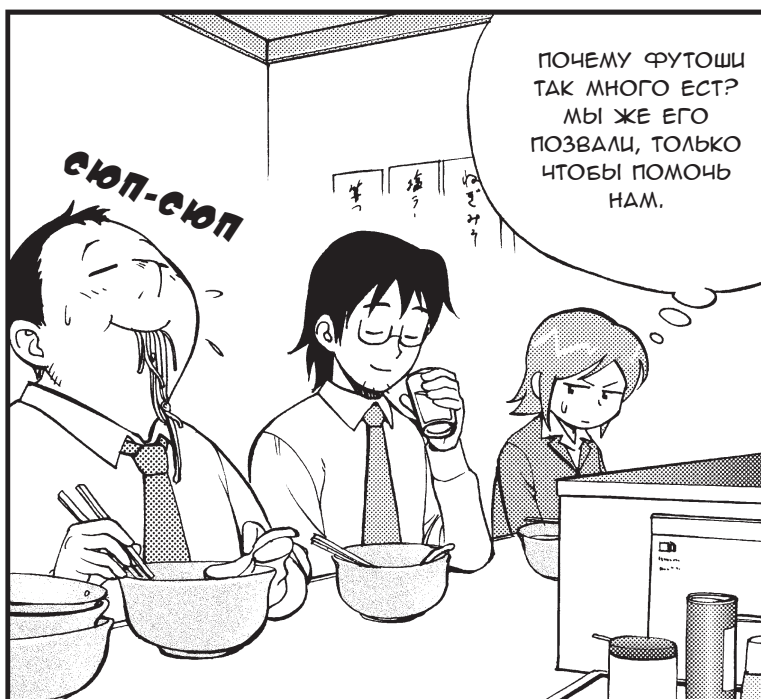
Когда приращение $\rightarrow 0$, то и относительная погрешность тоже $\rightarrow 0$.

Приращение в точке $x = 2$	$f(x)$	$g(x)$	Погрешность	Относительная погрешность
1	9	8	1	100%
0,1	4,41	4,4	0,01	10%
0,01	4,0401	4,04	0,0001	1%
0,001	4,004001	4,004	0,000001	0,1%

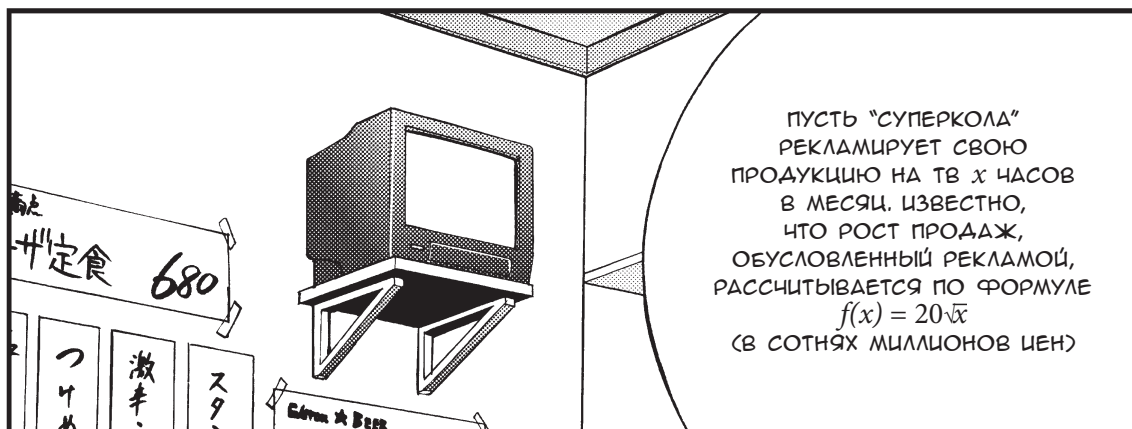
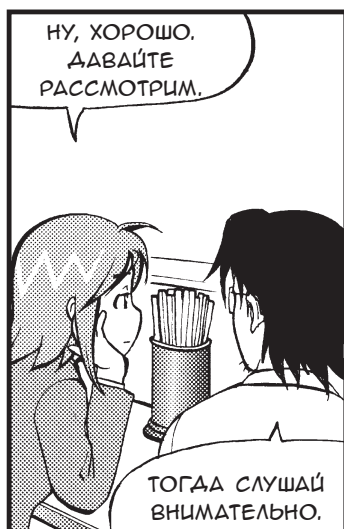
⋮
0

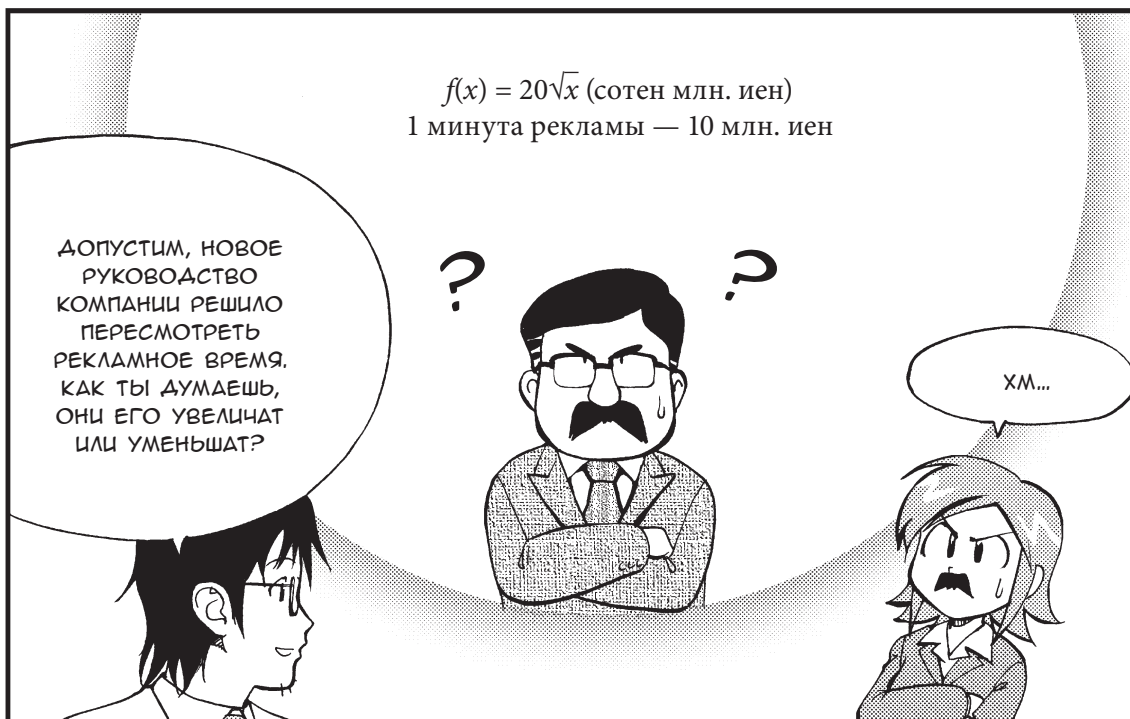
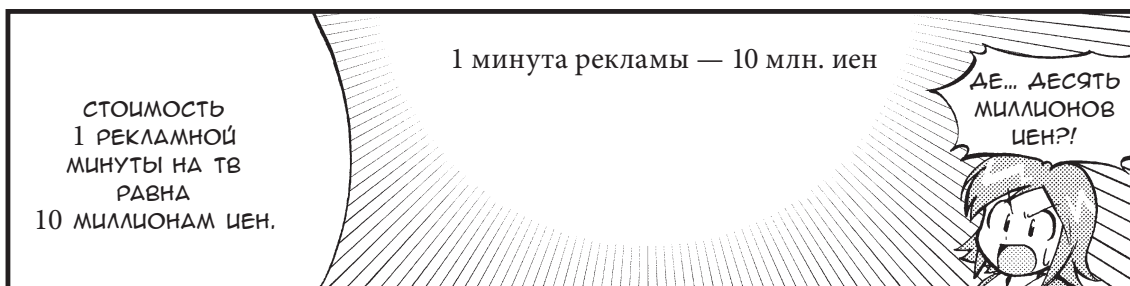
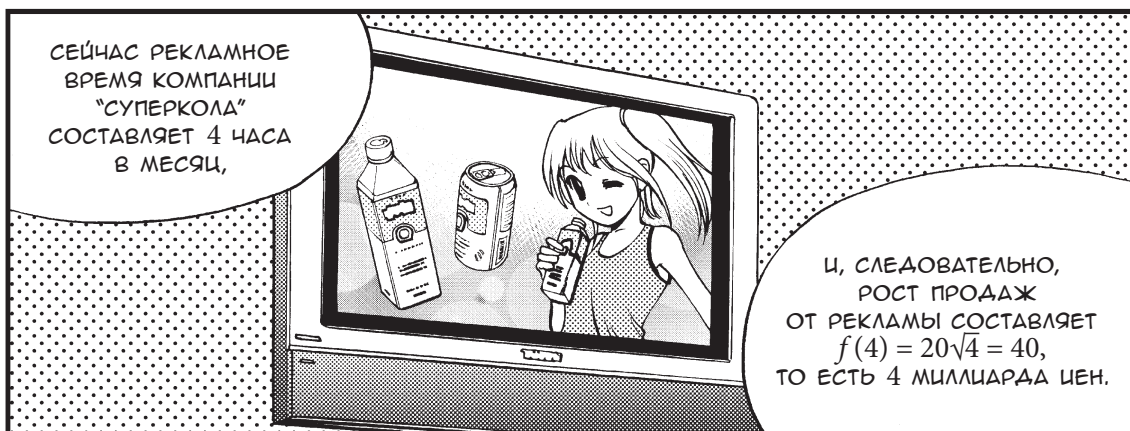
⋮
0





1.3. ПРИМЕНЕНИЕ ПРОИЗВОДНЫХ





Шаг 1

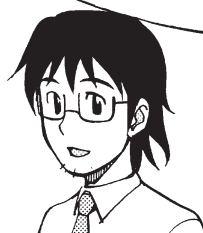
УПРОСТИМ ЗАДАЧУ, ЗАМЕНИВ СЛОЖНУЮ ФУНКЦИЮ $f(x) = 20\sqrt{x}$ ПРОСТОЙ ЛИНЕЙНОЙ ФУНКЦИЕЙ, ЧТО ПОЗВОЛИТ НАМ СДЕЛАТЬ ПРИБЛИЗИТЕЛЬНЫЕ ОЦЕНКИ.

$$f(x) = 20\sqrt{x} \quad (\text{сотни млн иен})$$

↓ аппроксимация

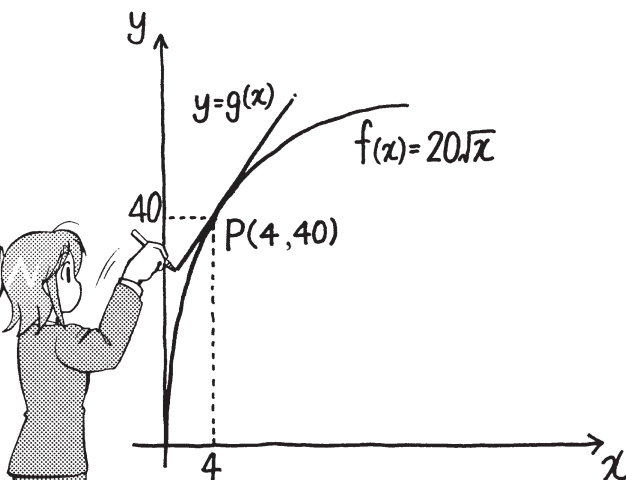
$$y = g(x)$$

ТАК КАК ЛИНЕЙНАЯ ФУНКЦИЯ НЕ МОЖЕТ АППРОКСИМИРОВАТЬ ВСЮ ИСХОДНУЮ ФУНКЦИЮ, РАССМОТРИМ ТОЛЬКО ОКРЕСТНОСТЬ ТОЧКИ $x = 4$.



Шаг 2

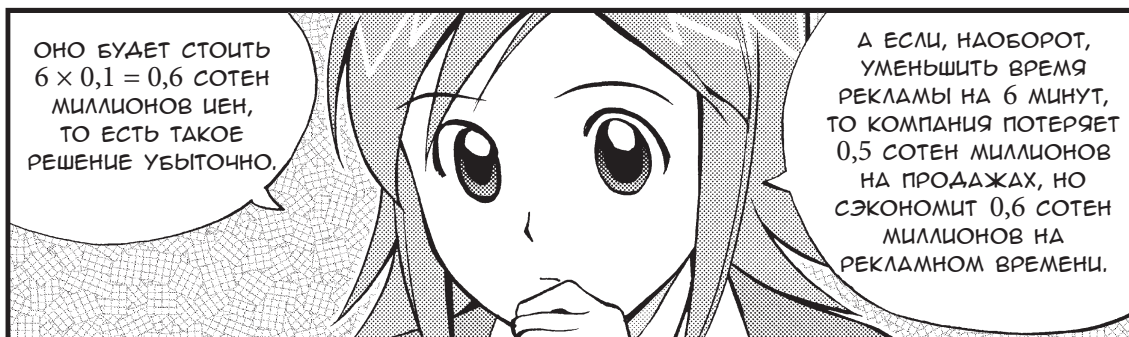
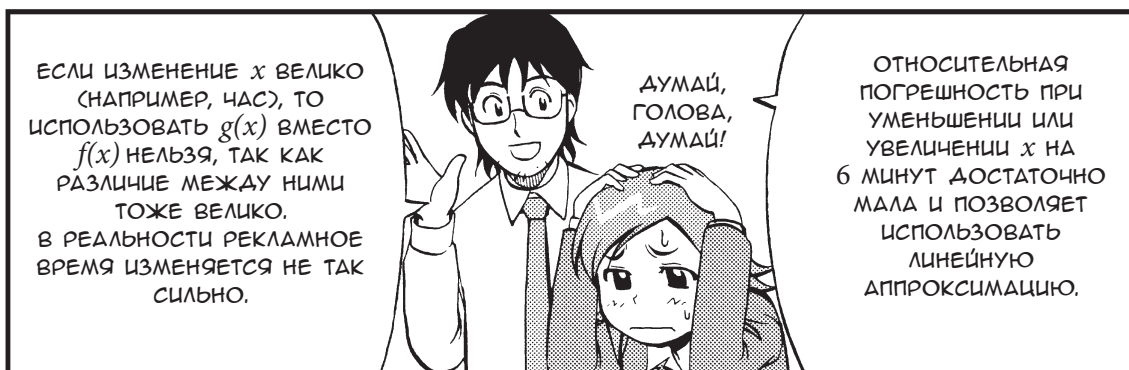
ПРОВЕДЁМ КАСАТЕЛЬНУЮ К КРИВОЙ $f(x) = 20\sqrt{x}$ В ТОЧКЕ $(4, 40)$.

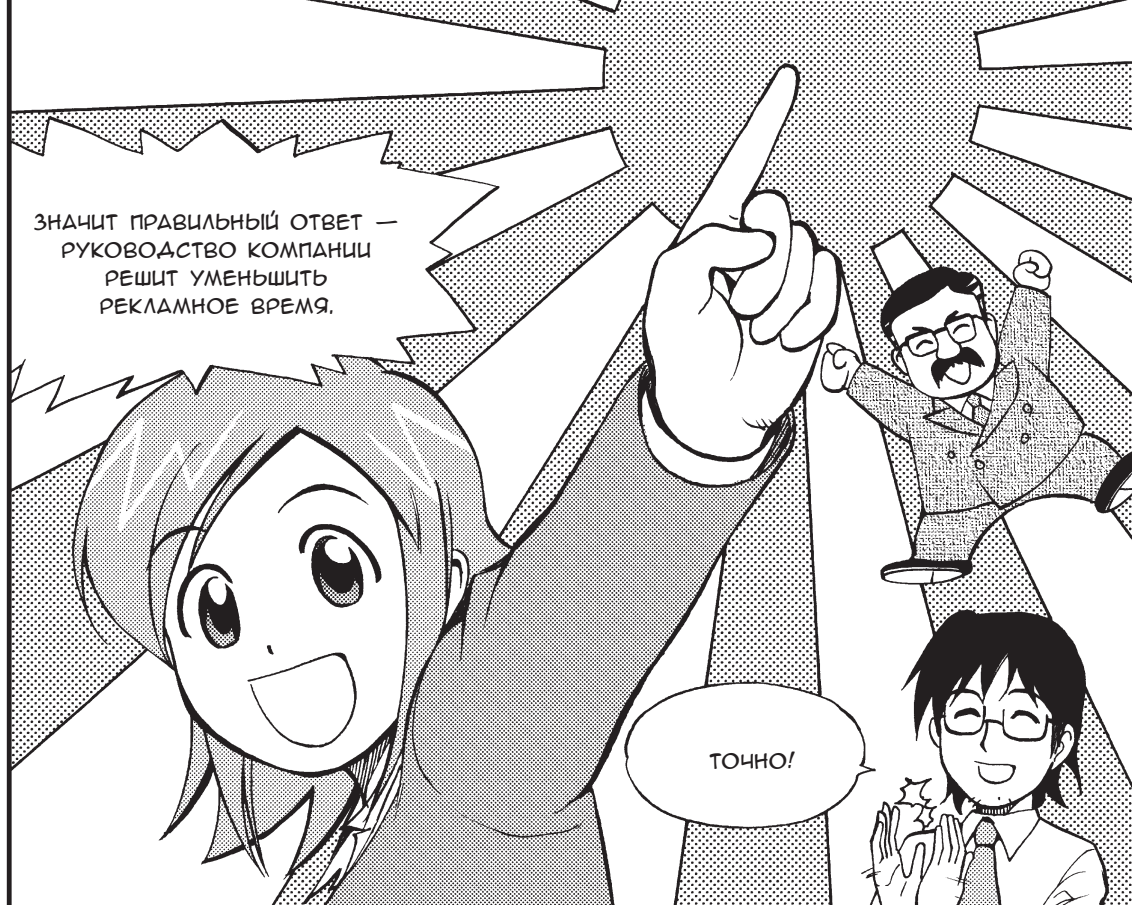


Выведем формулу касательной к кривой. Для этого сначала вычислим наклон (точнее, тангенс угла наклона) функции $f(x) = 20\sqrt{x}$ в точке 4:

$$\begin{aligned} f'(4) &= \frac{f(4 + \varepsilon) - f(4)}{\varepsilon} = \frac{20\sqrt{4 + \varepsilon} - 20 \times 2}{\varepsilon} = 20 \frac{(\sqrt{4 + \varepsilon} - 2) \times (\sqrt{4 + \varepsilon} + 2)}{\varepsilon \times (\sqrt{4 + \varepsilon} + 2)} = \\ &= 20 \frac{4 + \varepsilon - 4}{\varepsilon (\sqrt{4 + \varepsilon} + 2)} = \frac{20}{\sqrt{4 + \varepsilon} + 2}. \end{aligned} \quad (1)$$

Когда $\varepsilon \rightarrow 0$, знаменатель выражения (1) $\sqrt{4 + \varepsilon} + 2 \rightarrow 4$, а само выражение (1) $\rightarrow 20/4 = 5$. Отсюда получаем аппроксимирующую функцию $g(x) = 5(x - 4) + 40 = 5x + 20$. (Более подробное объяснение приведено в разделе 1.4 на стр. 39.)



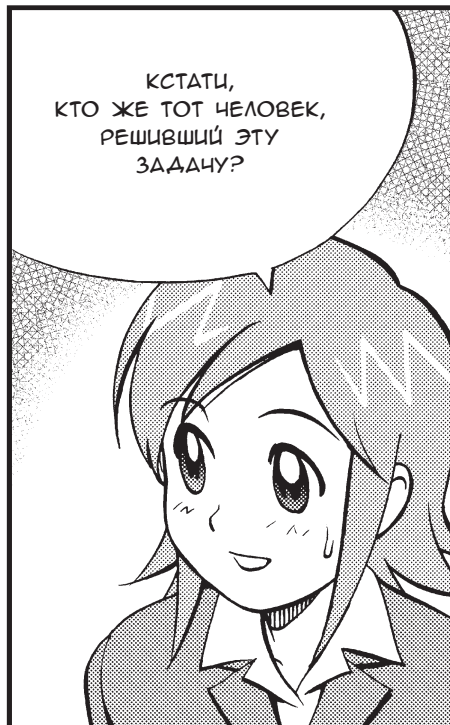


ЭТО ЧТО ЖЕ ПОЛУЧАЕТСЯ?
ФУНКЦИИ МОЖНО
ИСПОЛЬЗОВАТЬ ДЛЯ
РЕШЕНИЯ ПРОБЛЕМ КАК
В БИЗНЕСЕ, ТАК И В
ОБЫЧНОЙ ЖИЗНИ.

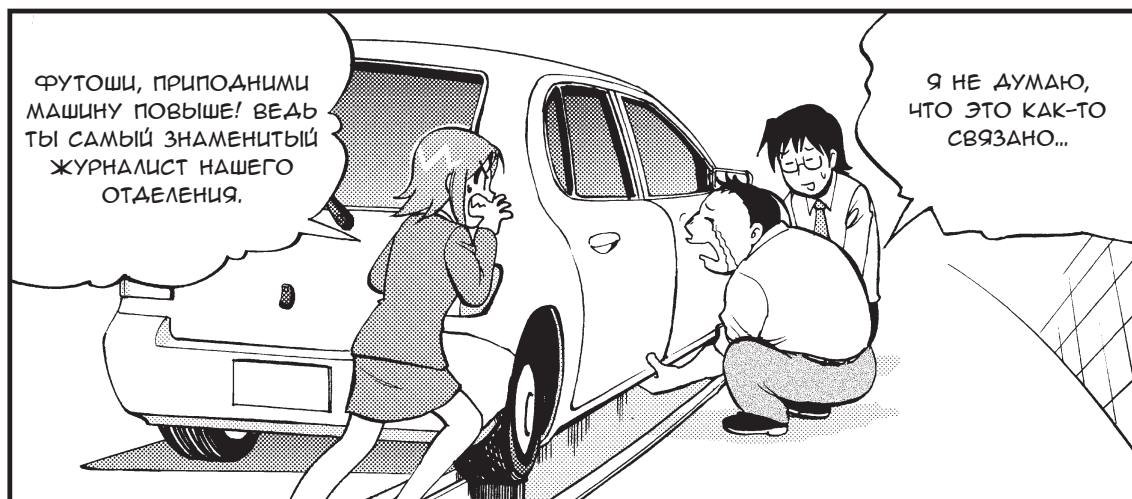
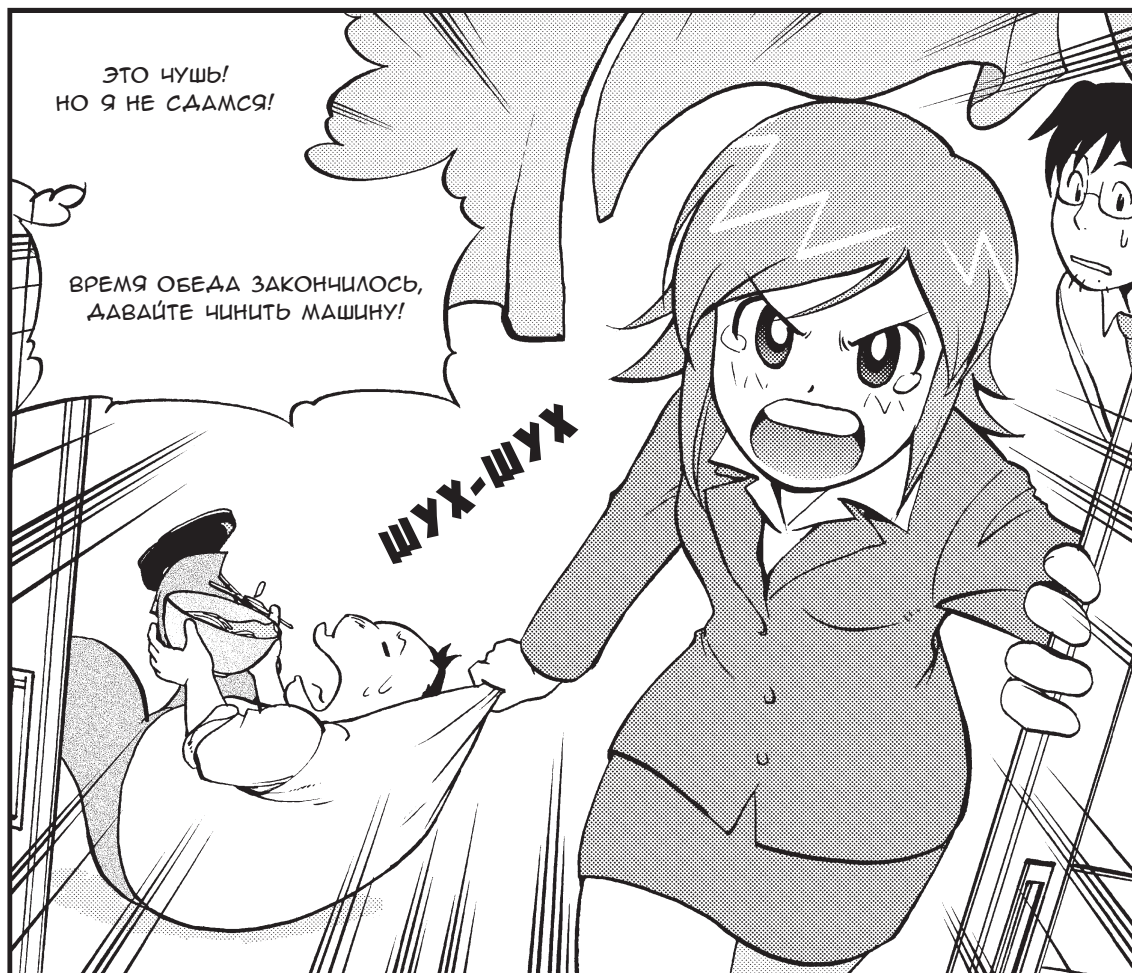


ЭТО ВЕРНО.
ЛЮДИ ЗАЧАСТУЮ
ИСПОЛЬЗУЮТ ФУНКЦИИ,
ДАЖЕ НЕ ВСЕГДА
ОСОЗНАВАЯ ЭТО.

КСТАТИ,
КТО ЖЕ ТОТ ЧЕЛОВЕК,
РЕШИВШИЙ ЭТУ
ЗАДАЧУ?







1.4. ВЫЧИСЛЕНИЕ ПРОИЗВОДНОЙ

Представим функцию $f(x)$ в окрестности точки $x = a$ в виде линейной функции

$$g(x) = k(x - a) + f(a) \quad (1)$$

$(g(x) \text{ совпадает с } f(a) \text{ при } x = a).$

Для этого надо найти коэффициент k .

Посчитаем относительную погрешность при приращении x от $x = a$ до $x = a + \varepsilon$.

$$\text{Относительная погрешность} = \frac{\text{Разность между } f \text{ и } g \text{ после приращения } \varepsilon \text{ к } x}{\text{Приращение } \varepsilon \text{ в точке } x = a} =$$

$$= \frac{f(a + \varepsilon) - g(a + \varepsilon)}{\varepsilon} =$$

$$= \frac{f(a + \varepsilon) - (k\varepsilon + f(a))}{\varepsilon} \quad \leftarrow \quad g(a + \varepsilon) = k(a + \varepsilon - a) + f(a) = k\varepsilon + f(a)$$

$$= \frac{f(a + \varepsilon) - f(a)}{\varepsilon} - k \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} 0. \quad \leftarrow \quad \begin{array}{l} \text{При приближении } \varepsilon \text{ к } 0 \\ \text{относительная погрешность} \\ \text{тоже приближается к } 0. \end{array}$$

Тогда

$$k = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{f(a + \varepsilon) - f(a)}{\varepsilon} \quad \leftarrow \quad \begin{array}{l} \text{При } \varepsilon \rightarrow 0 \quad \frac{f(a + \varepsilon) - f(a)}{\varepsilon} \\ \text{приближается к } k. \end{array}$$

(Символ \lim означает значение рассматриваемого выражения при $\varepsilon \rightarrow 0$.)

При таком k линейная функция (1) называется аппроксимацией функции $f(x)$, а k называется дифференциальным коэффициентом $f(x)$ при $x = a$.

Наклон касательной к $y = f(x)$ в любой точке $(a, f(a))$ вычисляется как

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{f(a + \varepsilon) - f(a)}{\varepsilon}.$$

Введём обозначение f' , приписав к f штрих, и запишем

$$f'(a) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{f(a + \varepsilon) - f(a)}{\varepsilon}$$

$f'(a)$ определяет наклон касательной к кривой $y = f(x)$ при $x = a$.

Если заменить точку a на переменную x , то f' станет функцией $f'(x)$.

Эту функцию называют *производной от функции f* , или *производной функции f* .

Операцию получения производной от функции f , называют *дифференцированием функции*.

ВЫВОДЫ

- Формула расчёта предела в дифференциальном исчислении совпадает с формулой относительной погрешности.
- Предел используется для нахождения производной.
- Производная функции в точке — это наклон касательной в этой точке.
- Производная не что иное, как функция изменения.

Производная $f'(x)$ при $x = a$ вычисляется по формуле

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{f(a + \varepsilon) - f(a)}{\varepsilon}$$

$g(x) = f'(a)(x - a) + f(a)$ — это линейная аппроксимирующая функция для $f(x)$ в точке a .

Функция $f'(x)$, выражающая наклон касательной к $f(x)$ в точке $(x, f(x))$, называется производной $f(x)$.

Помимо $f'(x)$ производная от $y = f(x)$ может также обозначаться:

$$y', \quad \frac{dy}{dx}, \quad \frac{df}{dx}, \quad \frac{d}{dx} f(x).$$

Вычисление производной постоянной, линейной и квадратичной функции

1. Найдём производную постоянной функции $f(x) = \alpha$.

Дифференциальный коэффициент $f'(x)$ при $x = a$:

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{f(a + \varepsilon) - f(a)}{\varepsilon} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\alpha - \alpha}{\varepsilon} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} 0 = 0.$$

Таким образом, производная постоянной функции равна 0, то есть $f'(x) = 0$, что вполне логично, так как изменение постоянной функции равно 0.

2. Вычислим производную линейной функции $f(x) = \alpha x + \beta$.

Производная функции $f(x)$ при $x = a$

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{f(a + \varepsilon) - f(a)}{\varepsilon} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\alpha(a + \varepsilon) + \beta - (\alpha a + \beta)}{\varepsilon} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \alpha = \alpha.$$

Таким образом, производная линейной функции равна константе ($f'(x) = \alpha$). Этот результат также очевиден — линейные функции по определению имеют постоянную скорость изменения в любой точке.

3. Найдём производную функции $f(x) = x^2$, с которой мы уже встречались ранее.

Дифференциальный коэффициент $f(x)$ при $x = a$:

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{f(a + \varepsilon) - f(a)}{\varepsilon} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{(a + \varepsilon)^2 - a^2}{\varepsilon} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{2a\varepsilon + \varepsilon^2}{\varepsilon} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} (2a + \varepsilon) = 2a.$$

Таким образом, производная функции $f(x) = x^2$ при $x = a$ равна $2a$, то есть $f'(a) = 2a$.

Следовательно, производная функции $f(x) = x^2$ — это $f'(x) = 2x$.

1.5. УПРАЖНЕНИЯ К ГЛАВЕ 1

1. Имеется функция $f(x)$ и линейная функция $g(x) = 8x + 10$. Известно, что относительная погрешность этих функций стремится к нулю при x , стремящемся к 5.

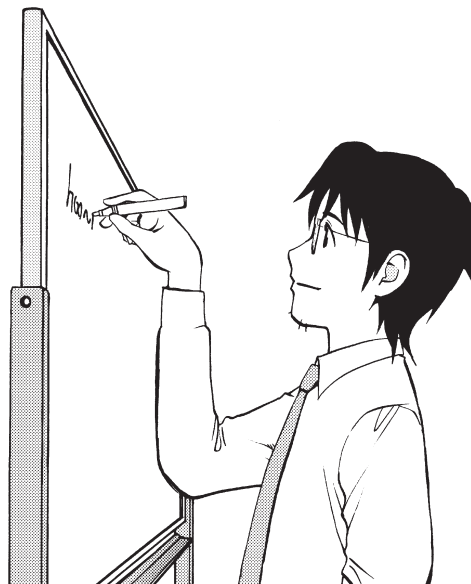
1) Найдите $f(5)$.

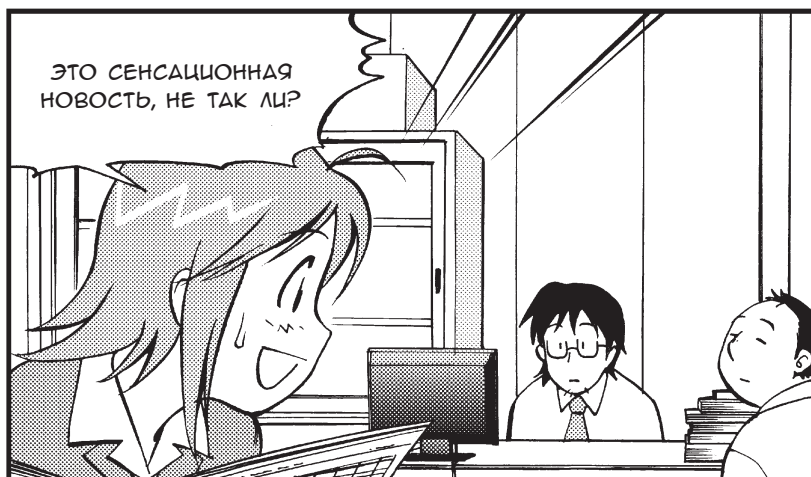
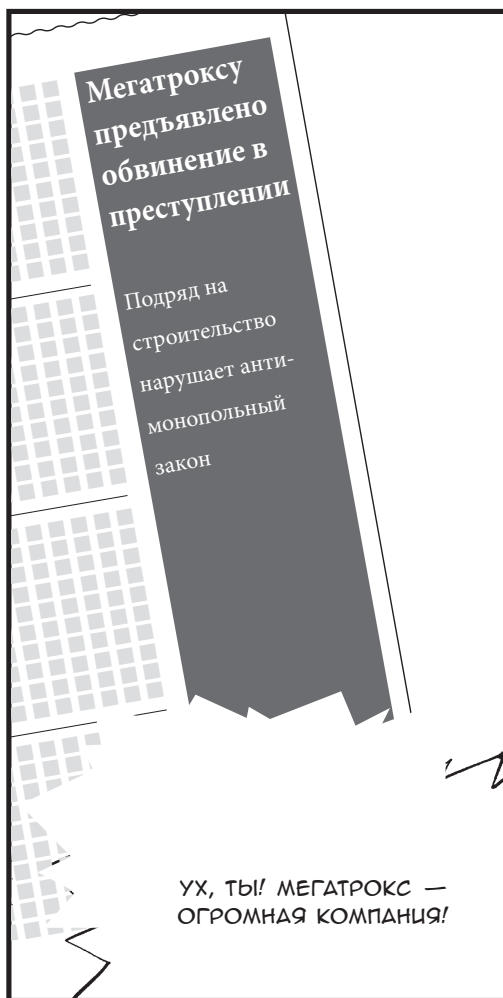
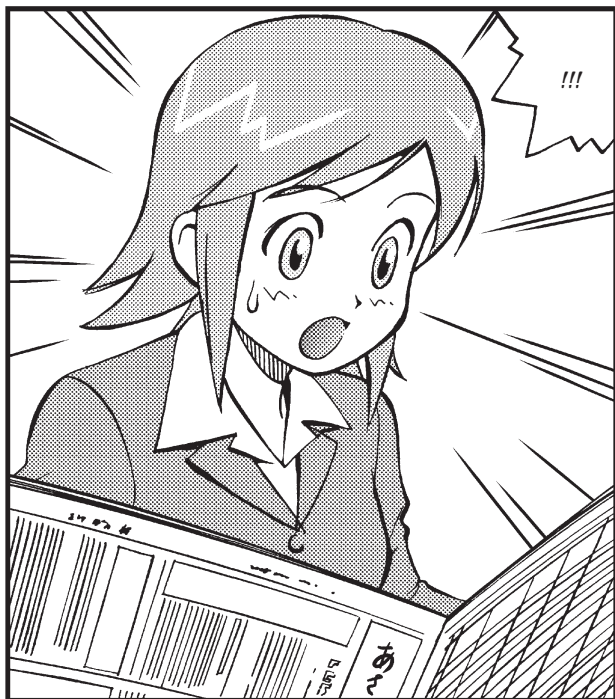
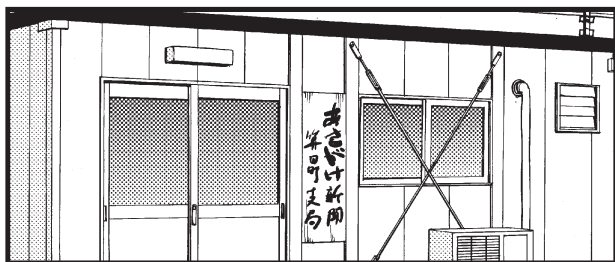
2) Найдите $f'(5)$.

2. Имеется функция $f(x) = x^3$. Найдите её производную $f'(x)$.

2

ИЗУЧАЕМ ПРИЁМЫ ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЯ!







Я ПОЛАГАЮ, ТЫ ХОЧЕШЬ
КОГДА-НИБУДЬ НАПИСАТЬ
БОЛЬШУЮ СТАТЬЮ?

КОНЕЧНО!



ВО ВРЕМЯ РАБОТЫ
В ГЛАВНОМ ОФИСЕ
ВЫ ДВОЕ ДОЛЖНЫ
БЫЛИ УЗНАВАТЬ
ДЕЙСТВИТЕЛЬНО
ВОЛНУЮЩИЕ СЕНСАЦИИ.
РАССКАЖИТЕ МНЕ!



НЕТ, НА
САМОМ ДЕЛЕ
ЭТО НЕ ТАК.

о...ох



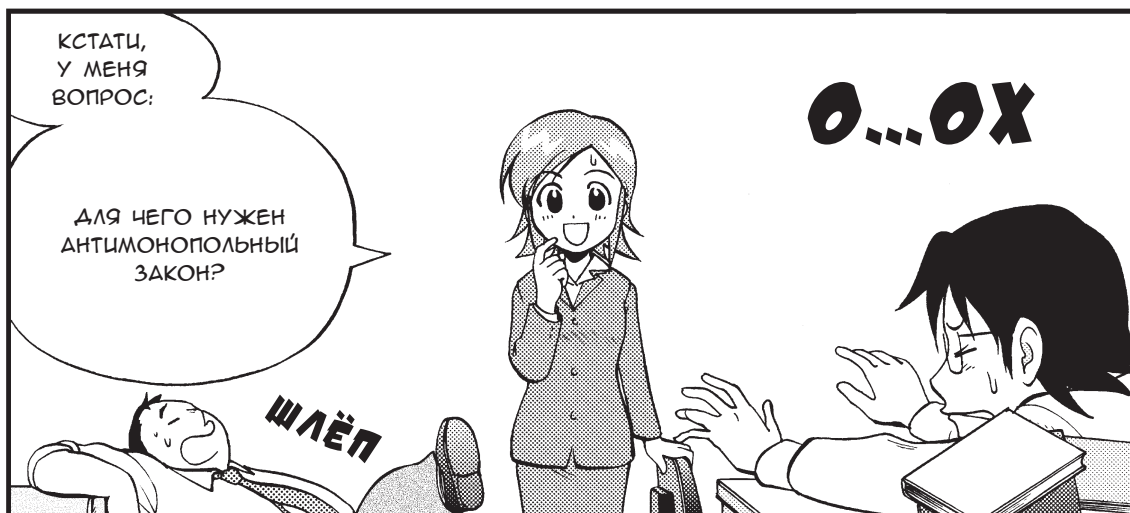
МНЕ НИКОГДА НЕ ВЕЗЛО
С СЕНСАЦИОННЫМИ
НОВОСТЯМИ. Я ДАЖЕ
ПИСАЛ ИЗВИНИТЕЛЬНОЕ
ПИСЬМО ЗА ИСПОЛЬЗОВАНИЕ
В СВОЁМ
РЕПОРТАЖЕ ЛОЖНОЙ
ИНФОРМАЦИИ.

НАШЁЛ ЧЕМ
ГОРАДИТЬСЯ!



СПОКОЙНО,
НОРИКО,
СПОКОЙНО.

Я ПОНИМАЮ, ЧТО
У ТЕБЯ БОЛЬШИЕ
НАДЕЖДЫ
НА ГАЗЕТНУЮ
ЖУРНАЛИСТИКУ, НО
ОСНОВЫ ВАЖНЕЕ.





2.1. ПРОИЗВОДНАЯ СУММЫ ФУНКЦИЙ

Производная суммы функций

$$\begin{aligned} \text{Если } h(x) &= f(x) + g(x), \\ \text{то } h'(x) &= f'(x) + g'(x) \end{aligned} \quad (2.1)$$

ТО ЕСТЬ
ПРОИЗВОДНАЯ
СУММЫ ФУНКЦИЙ
РАВНА СУММЕ ПРОИЗ-
ВОДНЫХ, КОТОРЫЕ
ЕЁ СОСТАВЛЯЮТ.



ЧТО ЭТО
ЗНАЧИТ?

ДАВАЙ РАССМОТРИМ
ЭТО ПРАВИЛО,
ИСПОЛЬЗУЯ
АППРОКСИМАЦИЮ
В ТОЧКЕ $x = a$,
КАК МЫ ЭТО ДЕЛАЛИ
В ГЛАВЕ 1.



ШУРХ-
ШУРХ

$$f(x) \approx f'(a)(x-a) + f(a) \quad (1)$$

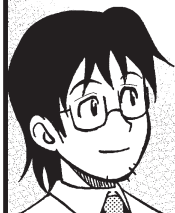
$$g(x) \approx g'(a)(x-a) + g(a) \quad (2)$$

СКРИП



ПУСТЬ ДАНО

$$h(x) \approx k(x-a) + l \quad (3)$$



МЫ ХОТИМ
НАЙТИ k .

ТАК КАК $h(x) = f(x) + g(x)$,
ПОДСТАВИМ (1) И (2)
В ИСХОДНОЕ УРАВНЕНИЕ.



ДА-ДА

И ПОЛУЧИМ,
ЧТО...

$$h(x) \approx f'(a)(x-a) + f(a) + g'(a)(x-a) + g(a) \quad [4]$$

ЕСЛИ МЫ
ПЕРЕГРУППИРУЕМ ЧЛЕНЫ
УРАВНЕНИЯ (4), ТО ИЗ
УРАВНЕНИЯ (3) СЛЕДУЕТ,
ЧТО КОЭФФИЦИЕНТ
ПРИ $(x-a)$
И ЕСТЬ k .

ДАЙТЕ
ПОСМОТРЕТЬ.

$h(x) \approx (f'(a) + g'(a)) \times (x-a) + f(a) + g(a)$.
С ДРУГОЙ СТОРОНЫ,
 $h(x) = k(x-a)$,
СЛЕДОВАТЕЛЬНО
 $k = f'(a) + g'(a)$!

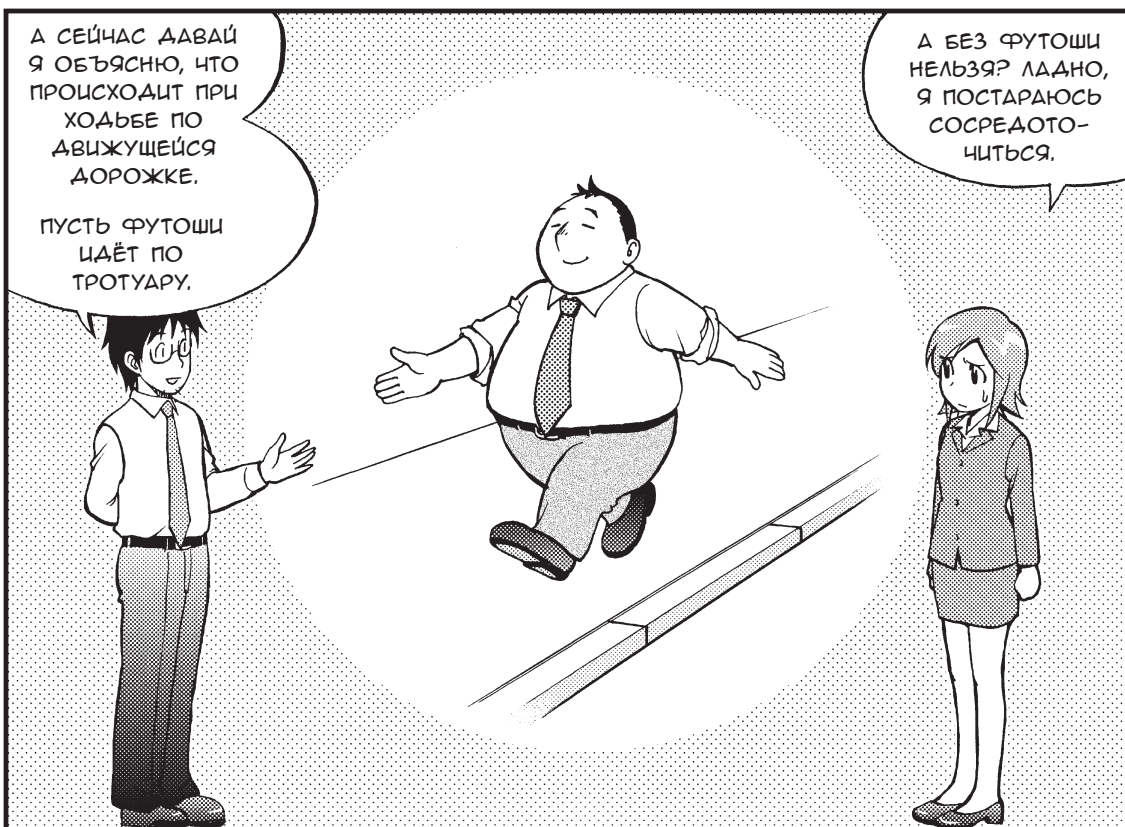
ВЕРНО!

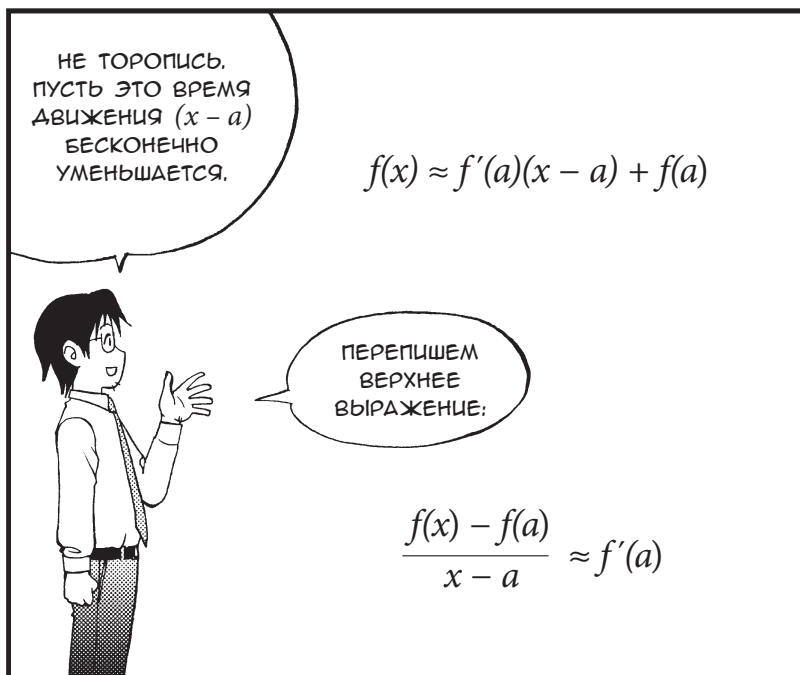
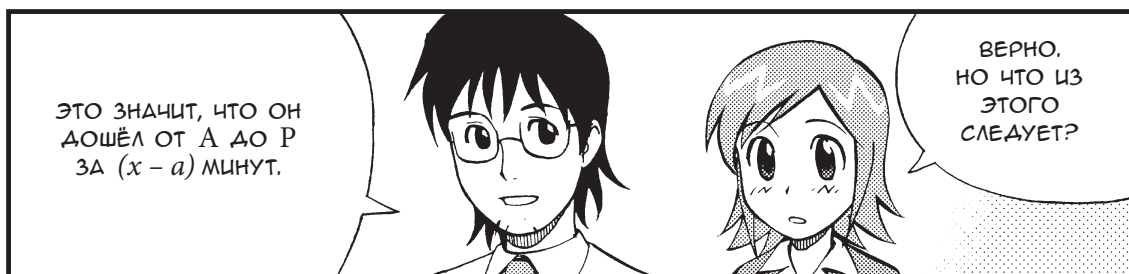
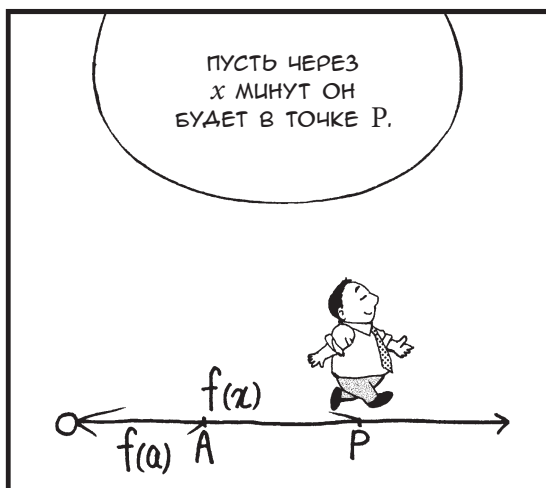
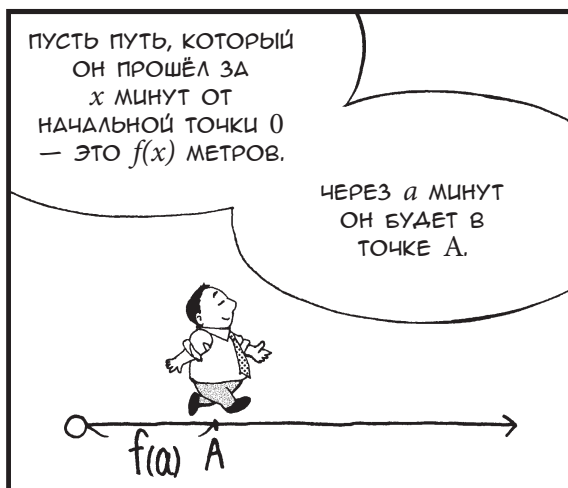
И
ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЙ
КОЭФФИЦИЕНТ РАВЕН
ПРОИЗВОДНОЙ, ТАК
ЧТО $k = h'(a) =$
 $= f'(a) + g'(a)$.

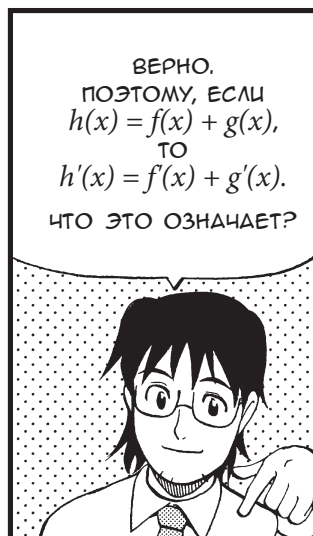
А СЕЙЧАС ДАВАЙ
Я ОБЪЯСНЮ, ЧТО
ПРОИСХОДИТ ПРИ
ХОДБЕ ПО
ДВИЖУЩЕЙСЯ
ДОРОЖКЕ.

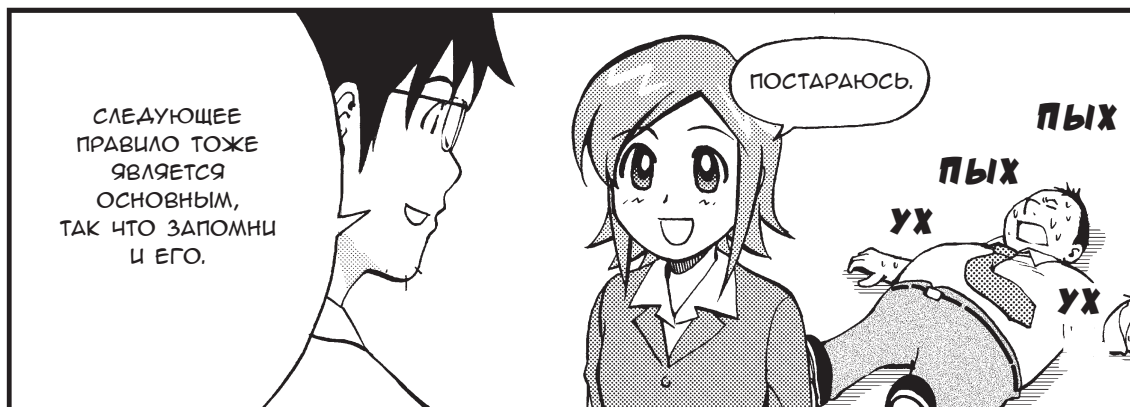
ПУСТЬ ФУТОШИ
ЦАЁТ ПО
ТРОТУАРУ.

А БЕЗ ФУТОШИ
НЕЛЬЗЯ? ЛАДНО,
Я ПОСТАРАЮСЬ
СОСРЕДОТО-
ЧИТЬСЯ.









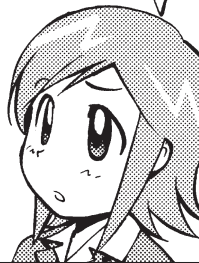
2.2. ПРОИЗВОДНАЯ ПРОИЗВЕДЕНИЯ ФУНКЦИЙ

Производная произведения функций

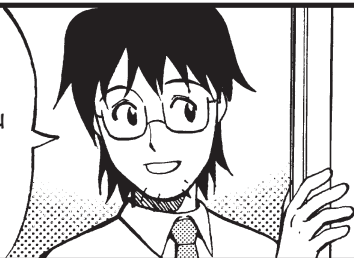
$$\begin{array}{l} \text{Если } h(x) = f(x) g(x), \\ \text{то } h'(x) = f'(x) g(x) + f(x) g'(x) \end{array} \quad (2.2)$$

Производная произведения функций равна сумме произведений, каждое из которых содержит функцию и производную другой функции.

ОТ ЭТИХ
ФУНКЦИЙ
ГОЛОВА КРУГОМ
ЦАДЕТ.



РАССМОТРИМ
ФУНКЦИИ
В ОКРЕСТНОСТИ
ТОЧКИ a
 $x = a$.



$$f(x) \approx f'(a)(x - a) + f(a)$$

$$g(x) \approx g'(a)(x - a) + g(a)$$

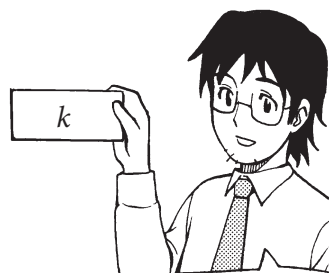
$$h(x) = f(x)g(x) \approx k(x - a) + l$$

$$h(x) \approx \{f'(a)(x - a) + f(a)\}\{g'(a)(x - a) + g(a)\}$$

$(x - a)$ —
ОЧЕНЬ МАЛЕНЬКОЕ
ИЗМЕНЕНИЕ. ЗНАЧИТ,
 $(x - a)^2$ ОЧЕНЬ ОЧЕНЬ МАЛО.
ТАК КАК НАШЕ РАВЕНСТВО
ПРИБЛИЖЕННОЕ, ТО ЭТИМ
ЧЛЕНОМ МОЖНО
ПРЕНЕБРЕЧЬ.

$$\{f'(a)g(a) + f(a)g'(a)\}(x - a) \approx k(x - a)$$

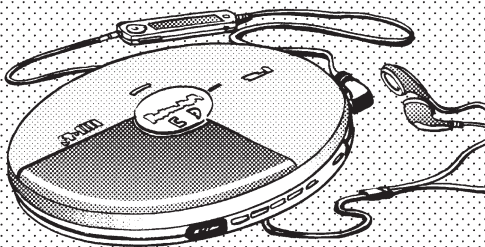
$$k = f'(a)g(a) + f(a)g'(a)$$



И ВОТ ЧТО МЫ
ПОЛУЧАЕМ.



ПРЕДСТАВИМ, К ПРИМЕРУ,
ЧТО КОМПАНИЯ, ПРОИЗВОДЯЩАЯ
CD-ПЛЕЕРЫ С РЫНОЧНОЙ ЦЕНОЙ
12 000 ЙЕН ЗА ШТУКУ, ХОЧЕТ УЗНАТЬ,
СТОИТ ЛИ УВЕЛИЧИВАТЬ ОБЪЁМ
ВЫПУСКАЕМОЙ ПРОДУКЦИИ.



ЕСЛИ СТОИМОСТЬ
ПРОИЗВОДСТВА ЕЩЁ
ОДНОГО CD-ПЛЕЕРА РАВНА
10 000 ЙЕН, ТО КОМПАНИЯ,
КОНЕЧНО, УВЕЛИЧИТ ВЫПУСК
ПРОДУКЦИИ, ТАК КАК
ПОЛУЧИТ ВЫГОДУ.

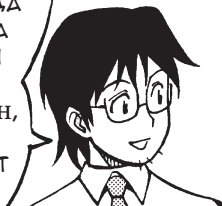


ПРАВДА, УВЕЛИЧЕНИЕ
ВЫПУСКА МОЖЕТ
ПРИВЕСТИ К СНИЖЕНИЮ
РЫНОЧНОЙ ЦЕНЫ, НО МЫ
БУДЕМ СЧИТАТЬ, ЧТО
ЭТОГО НЕ ПРОИЗОЙДЁТ.

ДОПУСТИМ, КОМПАНИЯ РЕШИЛА
УВЕЛИЧИТЬ ПРОИЗВОДСТВО. ПРИ
ЭТОМ ИЗМЕНИТСЯ СТОИМОСТЬ
ПРОИЗВОДСТВА, А ЗНАЧИТ, И
ЕГО ЭФФЕКТИВНОСТЬ. КОГДА
СТОИМОСТЬ ПРОИЗВОДСТВА
КАЖДОЙ НОВОЙ ЕДИНИЦЫ
ПРОДУКЦИИ ДОСТИГНЕТ
РЫНОЧНОЙ ЦЕНЫ 12 000 ЙЕН,
УВЕЛИЧЕНИЕ ОБЪЁМА
ПРОИЗВОДСТВА ПЕРЕСТАНЕТ
ПРИНОСИТЬ ПРИБЫЛЬ.

ТО ЕСТЬ

ЦЕНА = ЗАТРАТЫ НА ПРИРОСТ
ПРОИЗВОДСТВА ЕДИНИЦЫ
ПРОДУКЦИИ



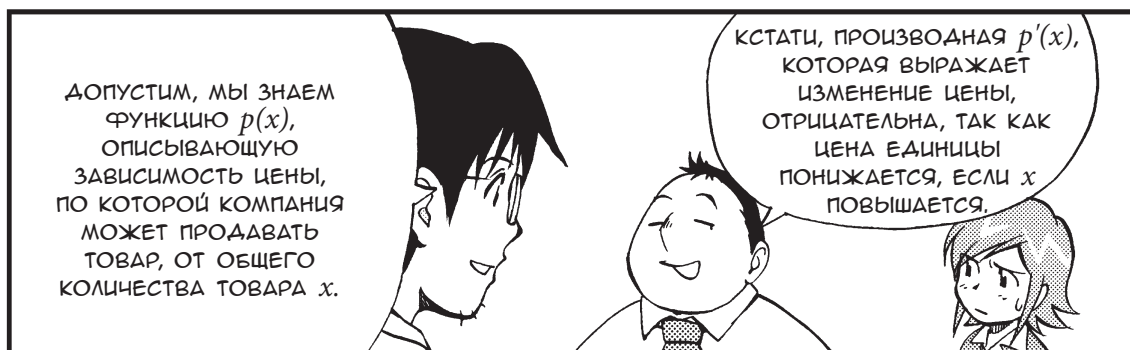
ДРУГАЯ СИТУАЦИЯ ВОЗНИКАЕТ
НА МОНОПОЛЬНОМ РЫНКЕ,
ГДЕ ТОЛЬКО ОДНА КОМПАНИЯ
ПОСТАВЛЯЕТ ОПРЕДЕЛЁННЫЙ
ПРОДУКТ. ТО ЕСТЬ ТОЛЬКО
ОДНА КОМПАНИЯ СОСТАВЛЯЕТ
ВЕСЬ РЫНОК.

МОНОПОЛЬНЫЙ



РЫНОК

ЕСЛИ ПОСМОТРЕТЬ
НА РЫНОК В ЦЕЛОМ,
ТО ПРИ ПОСТОЯННОМ
СПРОСЕ РОСТ
ПРЕДЛОЖЕНИЯ
ВЕДЁТ К СНИЖЕНИЮ
ЦЕНЫ.



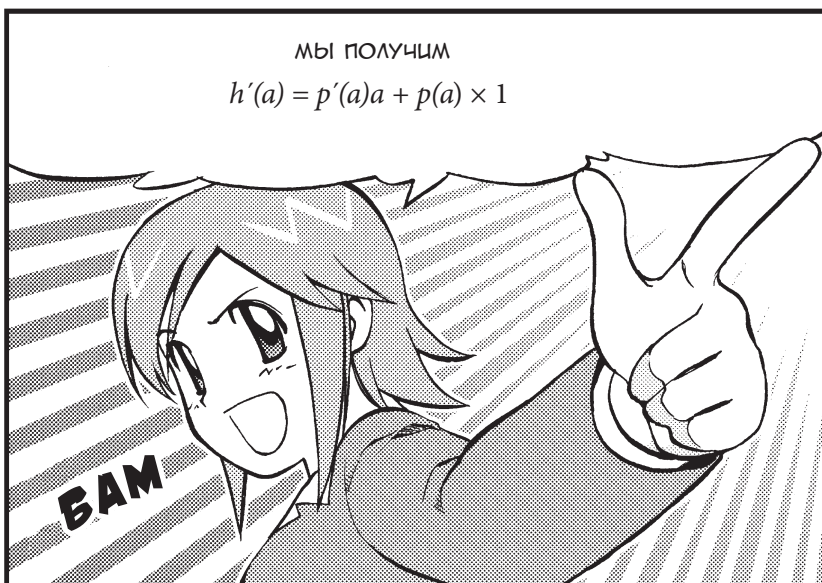
Доход $= h(x) = \text{цена} \times \text{количество} = p(x) \times x$

С другой стороны, мы знаем, что любую функцию в окрестности точки a можно записать в виде:

$$h(x) \approx h'(a)(x - a) + h(a), \text{ тогда}$$
$$\underbrace{h(x) - h(a)}_{\text{Изменение дохода}} \approx \underbrace{h'(x)(x - a)}_{\text{Изменение объёма производства}} \quad (2.3)$$

ИЗ ФОРМУЛЫ ВИДНО, ЧТО $h'(a)$ РАВНА ИЗМЕНЕНИЮ ДОХОДА ПРИ УВЕЛИЧЕНИИ ОБЪЁМА ПРОИЗВОДСТВА НА ЕДИНИЦУ ПРОДУКЦИИ.





Для того чтобы объём продаж увеличился на единицу, объём производства должен вырасти чуть больше:

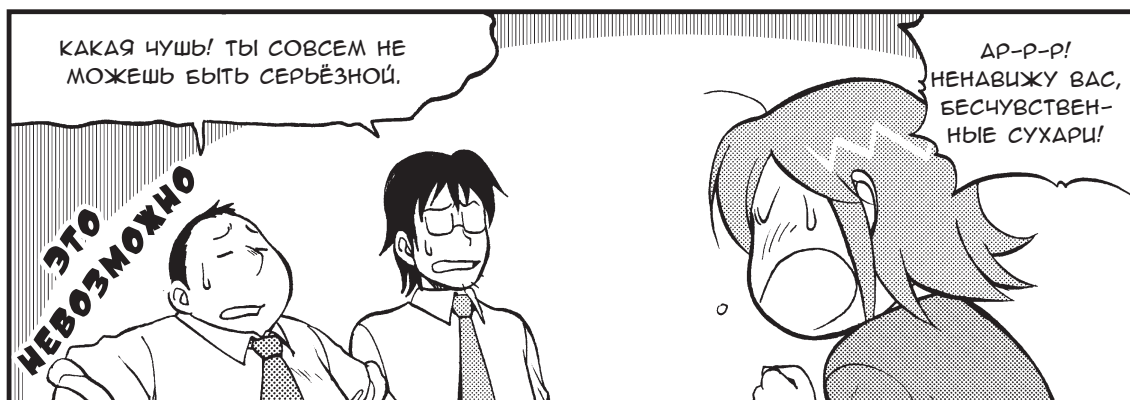
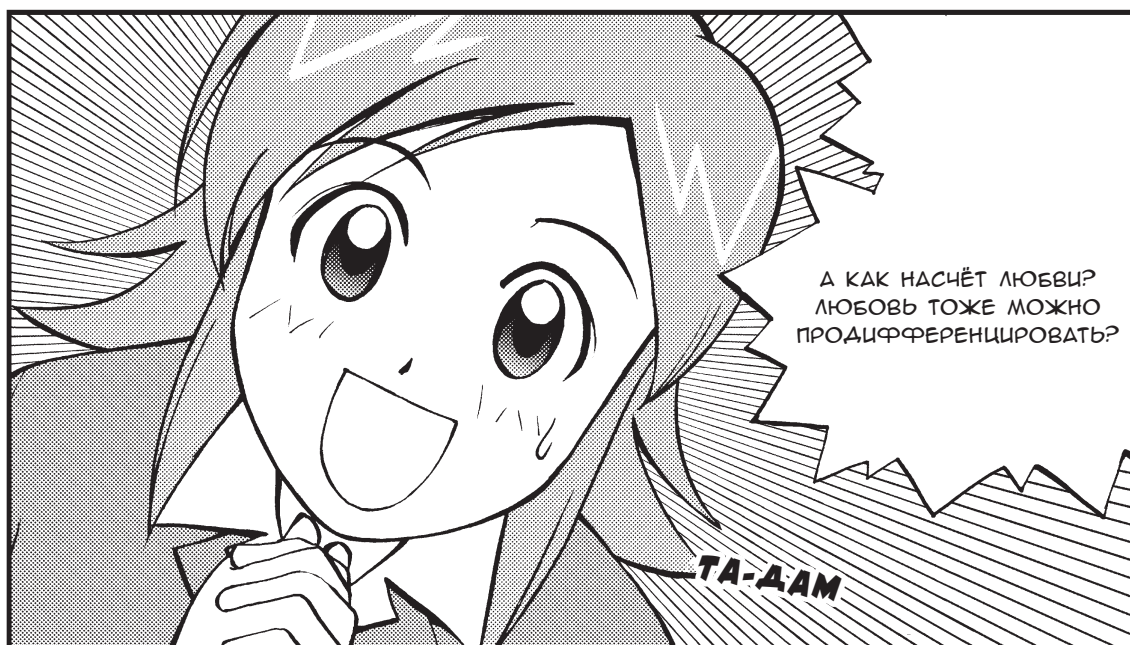
$$h'(a) = p'(a)a + p(a),$$

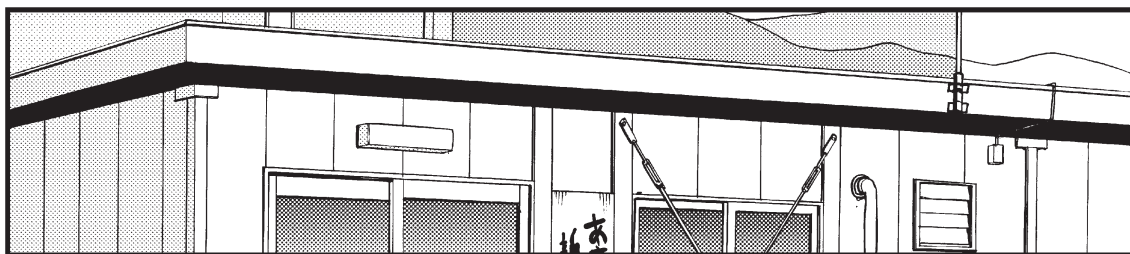
где

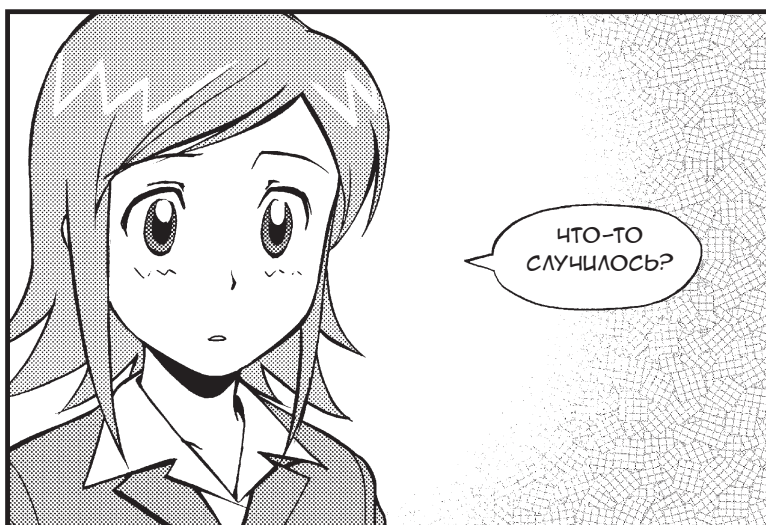
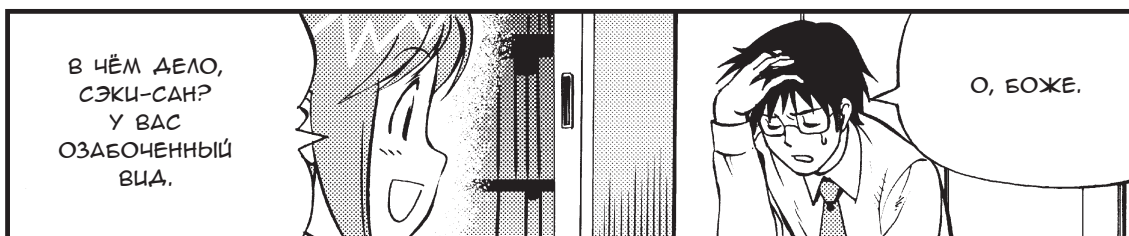
$p(a)$ — увеличение дохода от продажи a -й единицы;

$p'(a)a$ = Скорость снижения цены × Количество продукции =
= Общий убыток из-за снижения цены.









2.3. ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЕ МНОГОЧЛЕНОВ

СМЕНИМ ТЕМУ.



В ЗАКЛЮЧЕНИЕ
ЗАПОМНИМ ФОРМУЛЫ
ДЛЯ ДИФФЕРЕНЦИ-
РОВАНИЯ
МНОГОЧЛЕНОВ.
ДИФФЕРЕН-
ЦИРОВАНИЕ ЛЮБОГО
МНОГОЧЛЕНА МОЖНО
ОСУЩЕСТВИТЬ С
ПОМОЩЬЮ ТРЁХ
ФОРМУЛ.

Сначала покажем, что если $h(x) = x^n$, то $h'(x) = nx^{n-1}$.

Для этого используем несколько раз правило дифференцирования произведения.

Для $h(x) = x^2$: так как $h(x) = x \times x$, то $h'(x) = x \times 1 + 1 \times x = 2x$.

В этом случае формула верна.

Для $h(x) = x^3$: так как $h(x) = x^2 \times x$, то $h'(x) = (x^2)' \times x + x^2 \times (x)' = (2x)x + x^2 \times 1 = 3x^2$.

Формула верна и в этом случае.

Для $h(x) = x^4$: так как $h(x) = x^3 \times x$, то $h'(x) = (x^3)' \times x + x^3 \times (x)' = 3x^2 \times x + x^3 \times 1 = 4x^3$.

Опять формула справедлива. И так до бесконечности.

Любой многочлен можно продифференцировать, пользуясь тремя формулами!

Формулы для дифференцирования многочленов

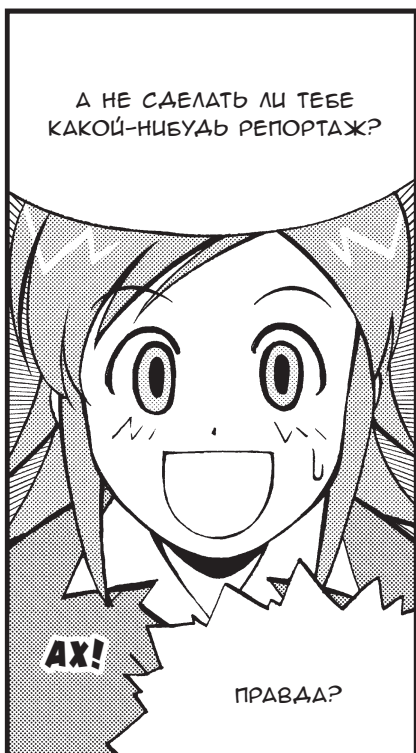
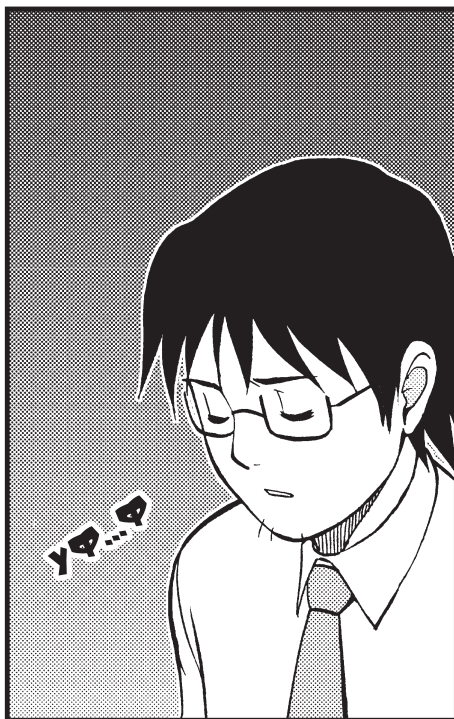
Сумма функций $\{f(x) + g(x)\}' = f'(x) + g'(x)$. (2.4)

Умножение на константу $\{\alpha f(x)\}' = \alpha f'(x)$. (2.5)

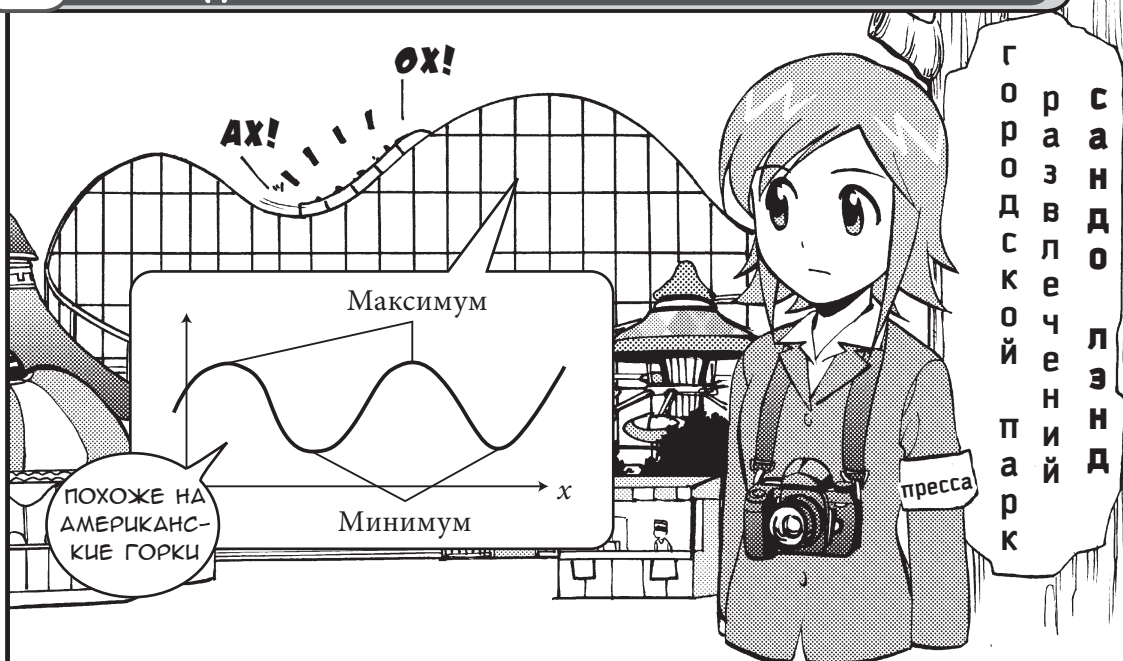
Степенная функция $\{x^n\}' = nx^{n-1}$. (2.6)

Проверим это в действии! Продифференцируем $h(x) = x^3 + 2x^2 + 5x + 3$:

$$\begin{aligned} h'(x) &= \{x^3 + 2x^2 + 5x + 3\}' = \underbrace{(x^3)' + (2x^2)' + (5x)' + (3)'}_{2.4} = \\ &= \underbrace{(x^3)' + 2(x^2)' + 5(x)'}_{2.5} = \underbrace{3x^2 + 2(2x) + 5 \times 1}_{2.6} = 3x^2 + 4x + 5. \end{aligned}$$



2.4. НАХОЖДЕНИЕ МАКСИМУМОВ И МИНИМУМОВ

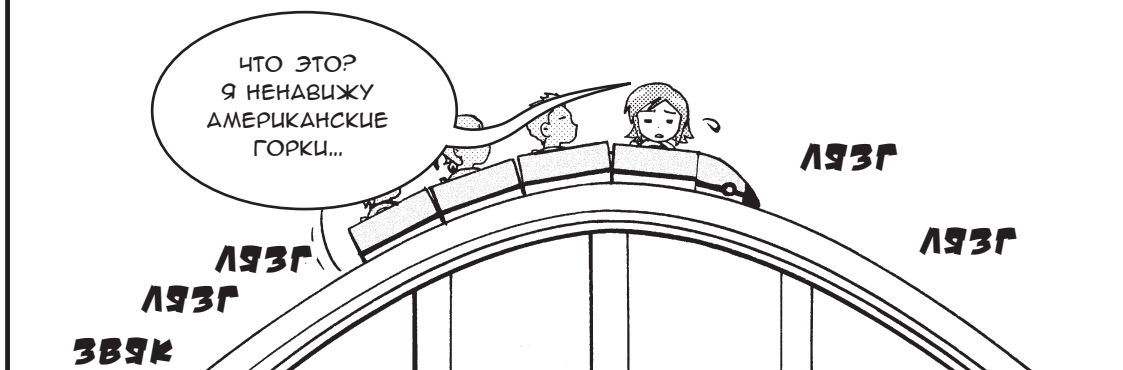


Максимумы и минимумы функции находятся там, где функция от убывания переходит к возрастанию или наоборот. Они важны для изучения свойств функции. Так как максимум или минимум часто является абсолютным максимумом или минимумом, то, соответственно, он является полезной точкой для нахождения оптимального решения.

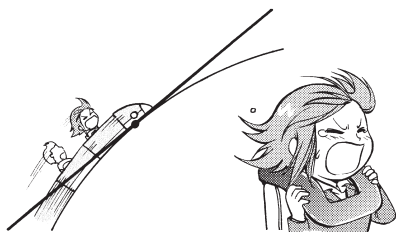
Условия экстремумов

Функция $y = f(x)$ имеет максимум или минимум в точке $x = a$, если $f'(a) = 0$.

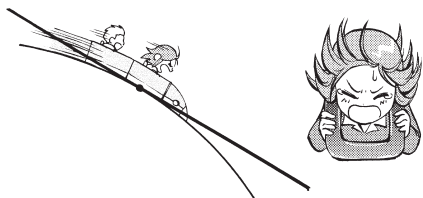
Это значит, что мы можем найти максимумы или минимумы, найдя значение a , удовлетворяющее условию $f'(a) = 0$. Эти значения ещё называют экстремумами.



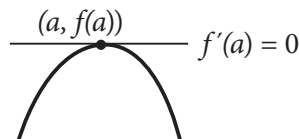
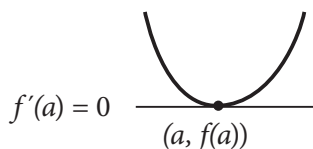
Пусть $f'(a) > 0$. Вблизи точки $x = a$ функцию $f(x)$ можно заменить приближённой линейной функцией $f(x) \approx f'(a)(x - a) + f(a)$, которая будет возрастать в точке $x = a$ вследствие $f'(a) > 0$. Сама функция $f(x)$ будет иметь вид, близкий к изображённому на рисунке. Другими словами, на этом участке дороги горка идёт вверх.



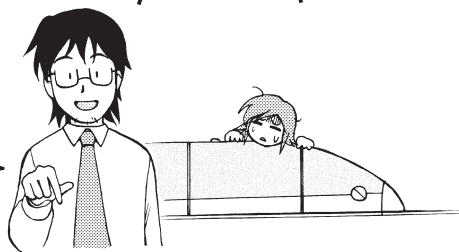
Аналогично $y = f(x)$ убывает при $f'(a) < 0$, то есть горка идёт вниз, и это ни верхняя, ни нижняя точка.



Если $y = f(x)$ возрастает и убывает при $f'(a) > 0$ и $f'(a) < 0$, то наверху или внизу обязательно должна быть точка, где $f'(a) = 0$. И действительно, в точке $f'(a) = 0$ приближённая линейная функция будет равна константе $y = f'(a)(x - a) + f(a) = 0 \times (x - a) + f(a)$. Это формула горизонтальной касательной к кривой $f(x)$, что и должно наблюдаться в максимумах и минимумах.

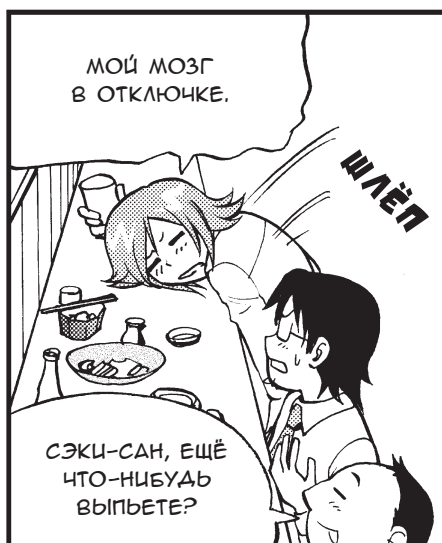
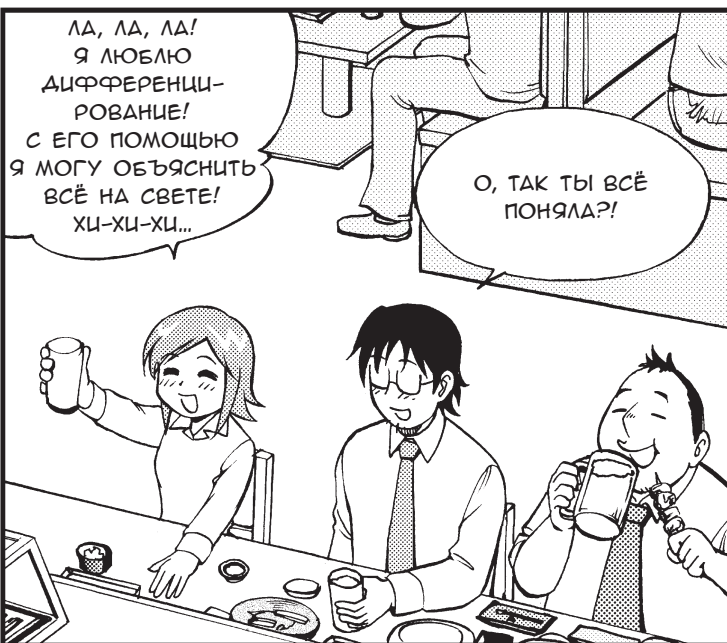


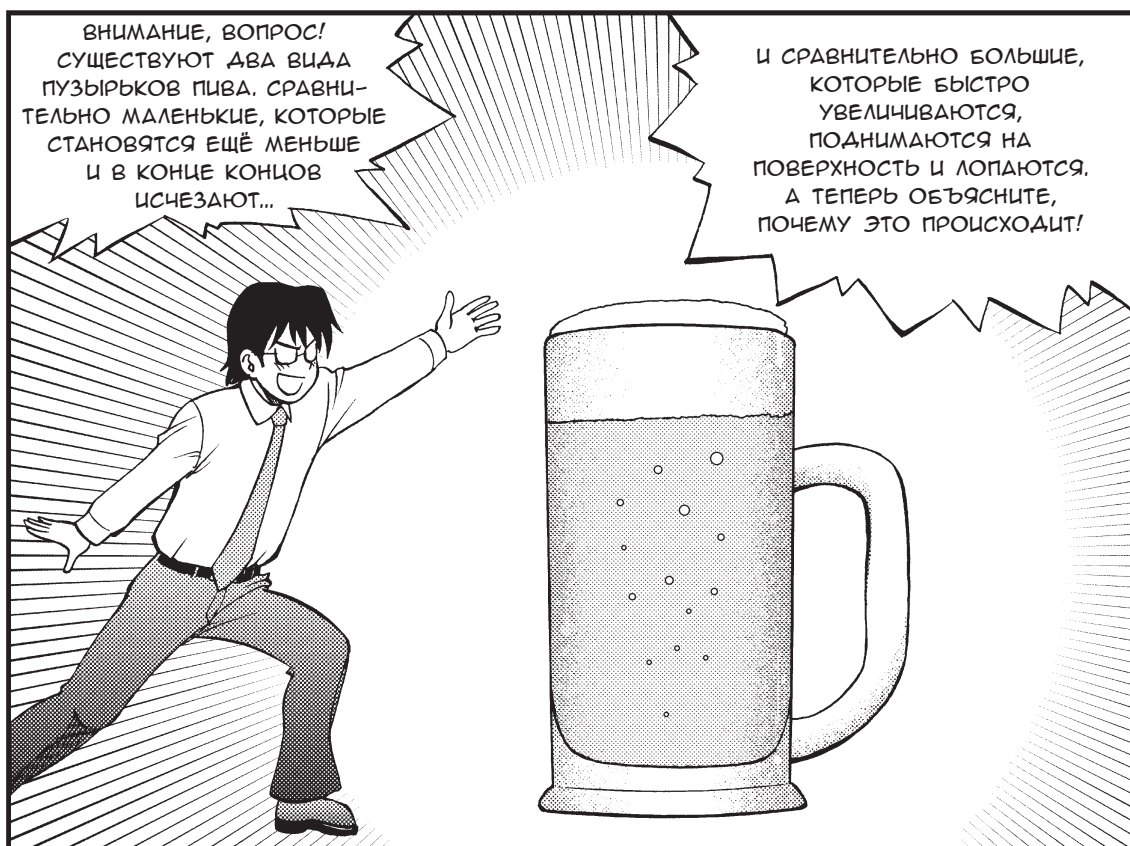
ЭТИ
РАССУЖДЕНИЯ
МОГУТ БЫТЬ
ПОДЫТОЖЕНЫ
СЛЕДУЮЩЕЙ
ТЕОРЕМОЙ.

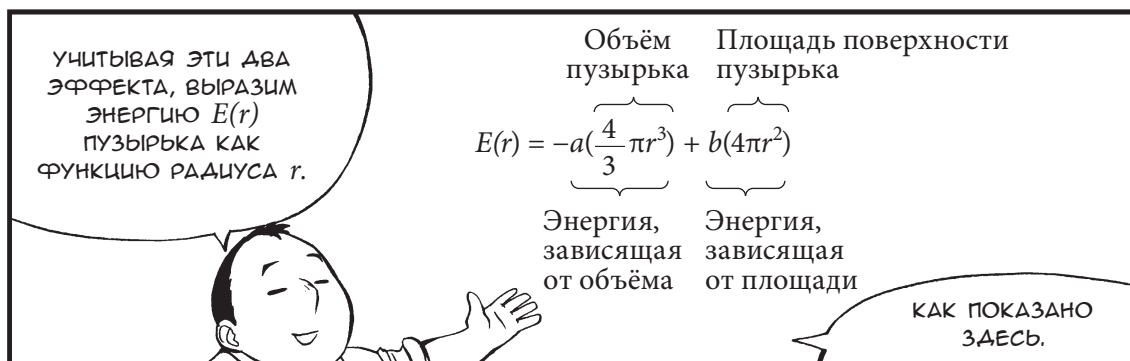
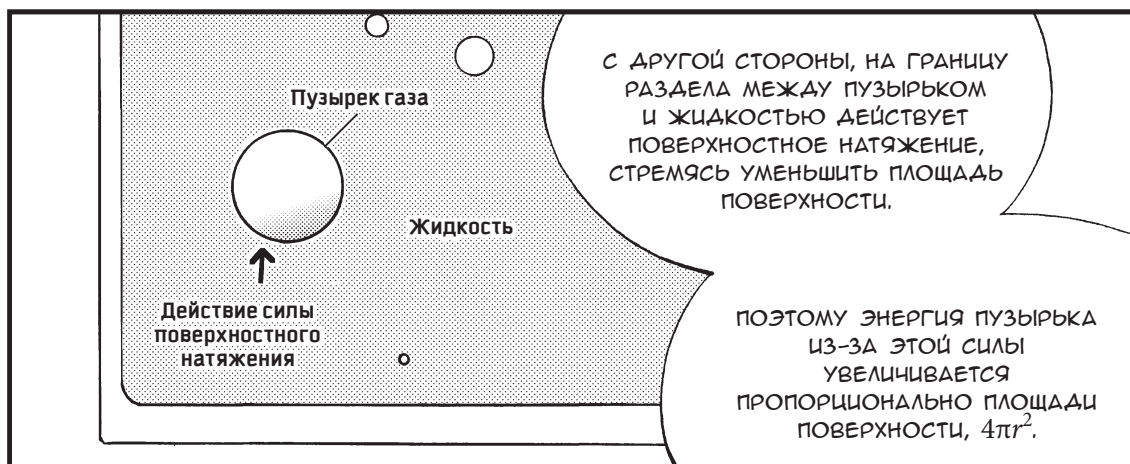
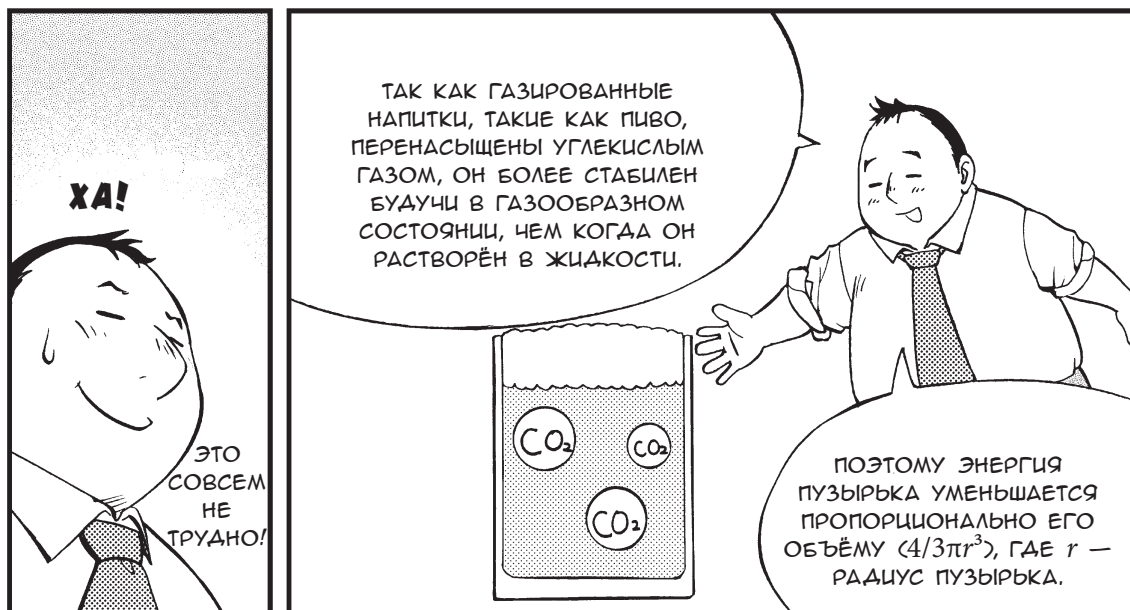


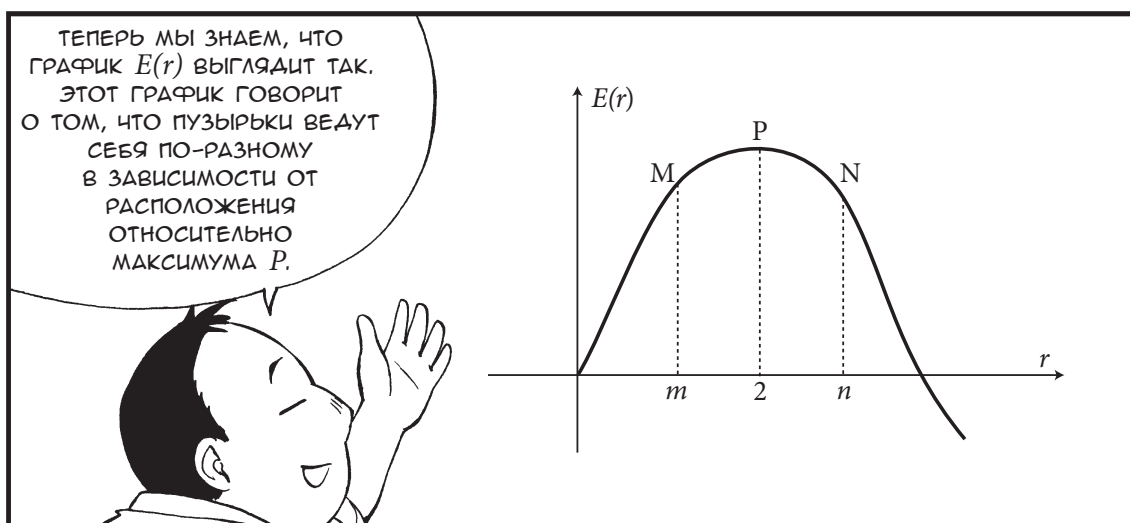
Условия возрастания и убывания

Если $f'(a) > 0$, то в точке $x = a$ функция $y = f(x)$ возрастает.
Если $f'(a) < 0$, то в точке $x = a$ функция $y = f(x)$ убывает.

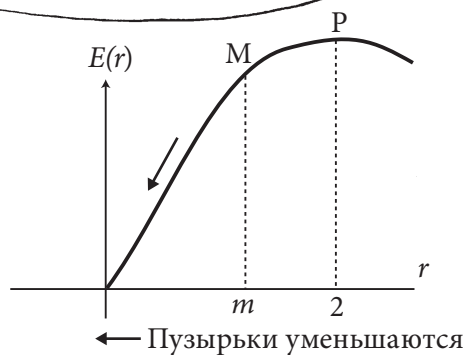




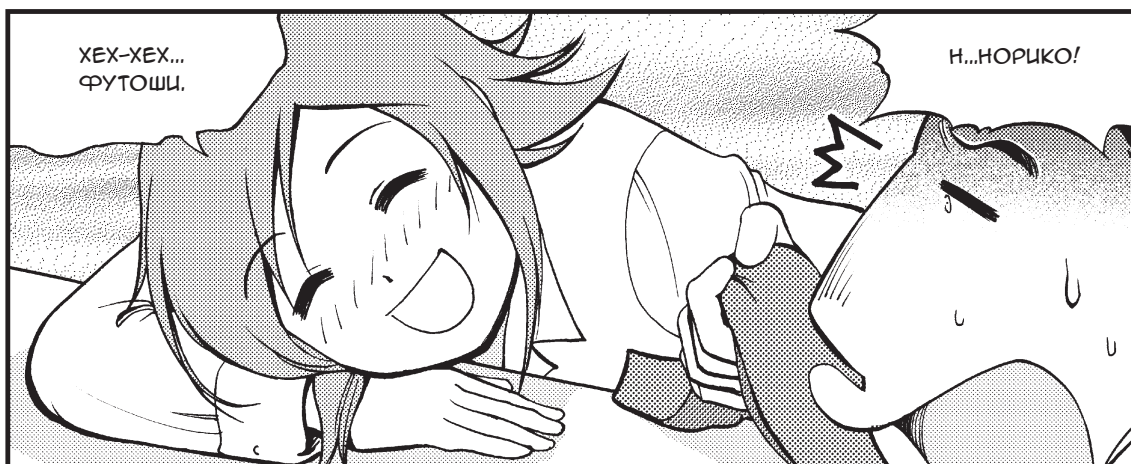
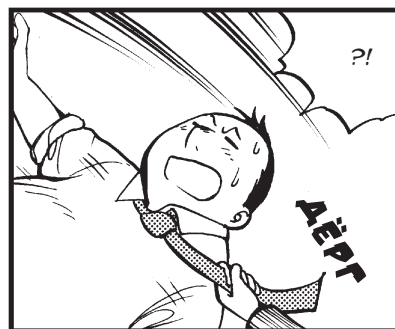
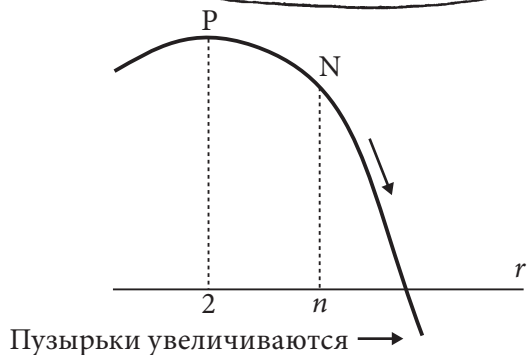




ПУЗЫРЁК С РАДИУСОМ m И ЭНЕРГИЕЙ M , НАЧНЁТ УМЕНЬШАТЬ СВОЙ РАДИУС (m), ЧТОБЫ УМЕНЬШИТЬ ЭНЕРГИЮ $E(r)$. ПУЗЫРЁК БУДЕТ УМЕНЬШАТЬСЯ, ПОКА СОВСЕМ НЕ ПРОПАДЁТ.



С ДРУГОЙ СТОРОНЫ, ПУЗЫРЁК С РАДИУСОМ n И ЭНЕРГИЕЙ N , ЧТОБЫ УМЕНЬШИТЬ ЭНЕРГИЮ $E(r)$ НАЧНЁТ УВЕЛИЧИВАТЬ СВОЙ РАДИУС. ПУЗЫРЁК БУДЕТ РАСТИ И ВЫХОДИТЬ НА ПОВЕРХНОСТЬ ПИВА.





2.5. ТЕОРЕМА О СРЕДНЕМ

Как говорилось выше, производная — это коэффициент при x в приближённой линейной функции, заменяющей функцию $f(x)$ в окрестности $x = a$.

То есть

$$f(x) \approx f'(a)(x - a) + f(a) \text{ (при } x, \text{ стремящемся к } a\text{)}.$$

Но линейная функция — это только «приближение» $f(x)$, и для b , даже близких к a , строго говоря

$$f(b) \neq f'(a)(b - a) + f(a). \quad (1)$$

То есть это не точное равенство.



ДЛЯ ТЕХ, КОГО ЭТО НЕ УСТРАИВАЕТ,
СУЩЕСТВУЕТ СЛЕДУЮЩАЯ ТЕОРЕМА.

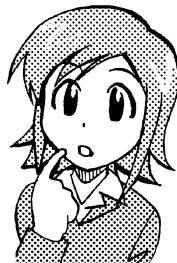
Теорема о среднем

Для любых a и b , таких, что $a < b$, найдётся ζ , удовлетворяющее условию $a < \zeta < b$, для которого будет выполняться равенство:

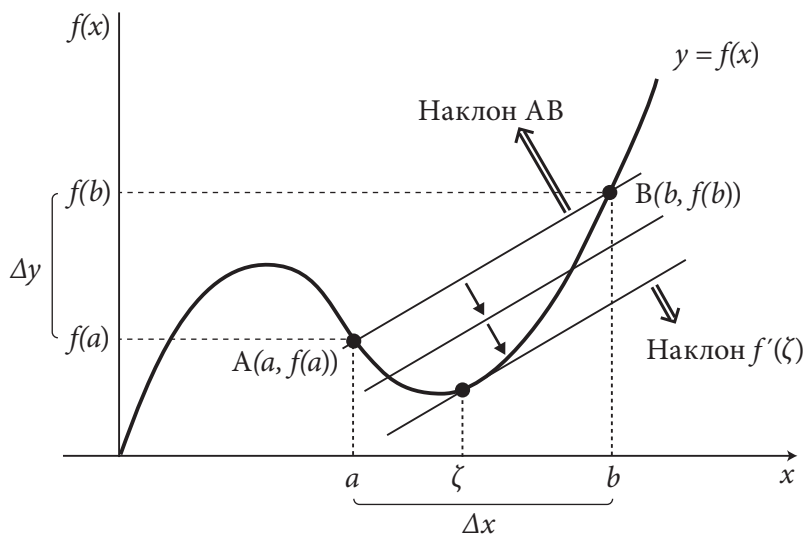
$$f(b) = f'(\zeta)(b - a) + f(a).$$

Другими словами, можно записать уравнение (1) со знаком равенства, используя не $f'(a)$, а $f'(\zeta)$ — значение производной в точке ζ , расположенной между a и b .

ПОЧЕМУ ТАК?



Нарисуем линию через точки $A(a, f(a))$ и $B(b, f(b))$, чтобы получить отрезок AB .



Известно, что тангенс угла наклона отрезка AB равен $\Delta y / \Delta x$:

$$\text{Тангенс угла наклона отрезка } AB = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}. \quad (2)$$

Будем перемещать линию AB из начального положения, как показано на рисунке.

В итоге линия достигнет точки, за которой она уже не будет пересекаться с графиком функции. Обозначим эту точку $(\zeta, f(\zeta))$.

В этой точке линия является касательной, и значит её наклон — $f'(\zeta)$.

Так как линия перемещалась параллельно её начальному положению, то её наклон не отличается от наклона, вычисленного по формуле (2).



СЛЕДОВАТЕЛЬНО, МЫ ПОЛУЧАЕМ, ЧТО

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(\zeta).$$

ОТКУДА

$$f(b) = f'(\zeta)(b - a) + f(a).$$



2.6. ПРОИЗВОДНАЯ ЧАСТНОГО ОТ ДЕЛЕНИЯ ФУНКЦИЙ

Найдём формулу для производной функции $h(x) = \frac{g(x)}{f(x)}$.

Сначала найдём производную функции $p(x) = \frac{1}{f(x)}$, которая является обратной к $f(x)$.

После этого мы сможем применить правило для производной произведения двух функций к $h(x) = g(x)p(x)$.

Очевидно, что $f(x)p(x) = 1$.

Тогда

$$1 = f(x)p(x) \approx \{f'(a)(x - a) + f(a)\}\{p'(a)(x - a) + p(a)\}.$$

Так как левая и правая части равны, то равны и их производные:

$$0 = p(a)f'(a) + f(a)p'(a).$$

Таким образом, имеем: $p'(a) = -\frac{p(a)f'(a)}{f(a)}$.

Так как $p(a) = \frac{1}{f(a)}$, подставляя это в числитель вместо $p(a)$, получаем $p'(a) = \frac{-f'(a)}{f(a)^2}$.

Запишем функцию $h(x) = \frac{g(x)}{f(x)}$ в виде $h(x) = g(x) \times \frac{1}{f(x)} = g(x)p(x)$

и применим правило умножения и формулу, полученную выше.

$$h'(x) = g'(x)p(x) + g(x)p'(x) = g'(x) \times \frac{1}{f(x)} - g(x) \frac{f'(x)}{f(x)^2} = \frac{g'(x)f(x) - g(x)f'(x)}{f(x)^2}.$$

В итоге получаем следующую формулу:

Производная частного от деления функций

$$h'(x) = \frac{g'(x)f(x) - g(x)f'(x)}{f(x)^2}. \quad (2.7)$$

2.7. ПРОИЗВОДНАЯ СЛОЖНОЙ ФУНКЦИИ

Получим формулу производной от $h(x) = g(f(x))$.

В окрестности $x = a$

$$f(x) - f(a) \approx f'(a)(x - a),$$

а в окрестности $y = b$

$$g(y) - g(b) \approx g'(b)(y - b).$$

Подставляем $b = f(a)$ и $y = f(x)$ в последнее выражение и получаем в окрестности $x = a$

$$g(f(x)) - g(f(a)) \approx g'(f(a))(f(x) - f(a)).$$

Заменим $f(x) - f(a)$ выражением справа из первого уравнения

$$g(f(x)) - g(f(a)) \approx g'(f(a))f'(a)(x - a).$$

Так как $g(f(x)) = h(x)$, то коэффициент при $(x - a)$ в этом выражении даёт

$$h'(a) = g'(f(a))f'(a).$$

Таким образом, имеем следующую формулу:

Производная сложной функции

$$h'(x) = g'(f(x)) f'(x). \quad (2.8)$$

2.8. ПРОИЗВОДНАЯ ОБРАТНОЙ ФУНКЦИИ

Используем полученную выше формулу, чтобы найти производную функции $x = g(y)$, обратной функции $y = f(x)$.

Так как $x = g(f(x))$ для любого x , дифференцирование обеих частей этого выражения даёт

$$1 = g'(f(x)) f'(x).$$

Преобразуя это выражение, получаем следующую формулу:

Производная обратной функции

$$g'(y) = \frac{1}{f'(x)}. \quad (2.9)$$

2.9. ФОРМУЛЫ ДЛЯ ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЯ

Функция	Формула	Комментарий
Умножение на константу	$(\alpha f(x))' = \alpha f'(x)$	Константа может быть вынесена за знак производной.
x^n (степень)	$(x^n)' = nx^{n-1}$	Показатель степени функции становится коэффициентом при производной, показатель степени производной понижается на 1.
Сумма	$(f(x) + g(x))' = f'(x) + g'(x)$	Производная суммы — сумма производных.
Произведение	$(f(x)g(x))' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$	Производная произведения — сумма произведений функции на производную другой функции.
Частное	$\left(\frac{g(x)}{f(x)^2}\right)' = \frac{g'(x)f(x) - g(x)f'(x)}{f(x)^2}$	Знаменатель возводится в квадрат. Числитель — разность произведений функции на производную другой функции.
Сложные функции	$(g(f(x)))' = g'(f(x))f'(x)$	Производная сложной функции — произведение производных внешней и внутренней функций.
Обратные функции	$g'(y) = \frac{1}{f'(x)}$	Производная обратной функции обратна производной исходной функции.

2.10. УПРАЖНЕНИЯ К ГЛАВЕ 2

1. Для натурального n найти производную $f'(x)$ для

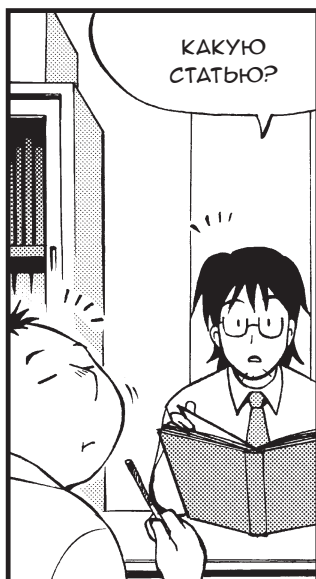
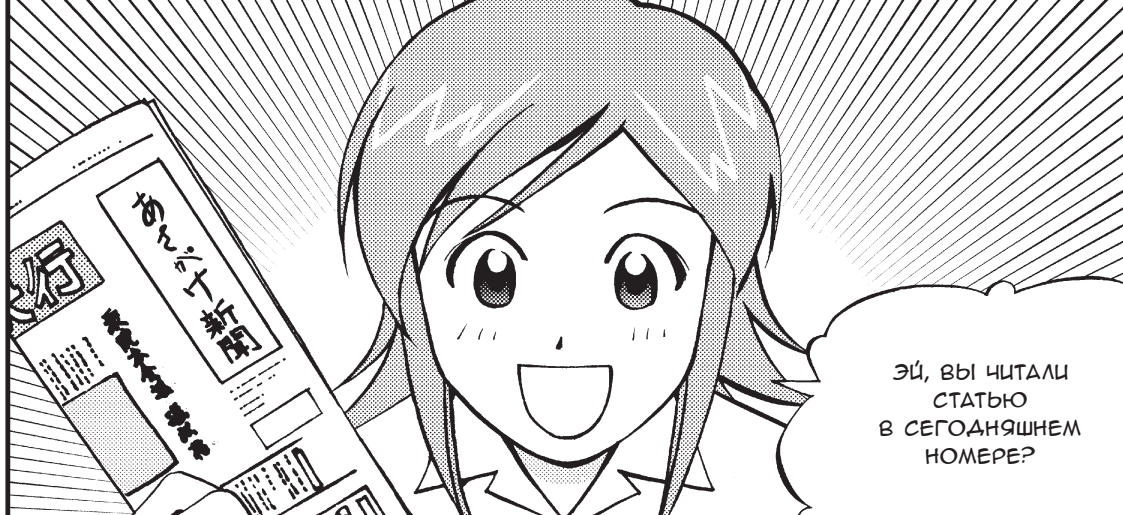
$$f(x) = \frac{1}{x^n}.$$

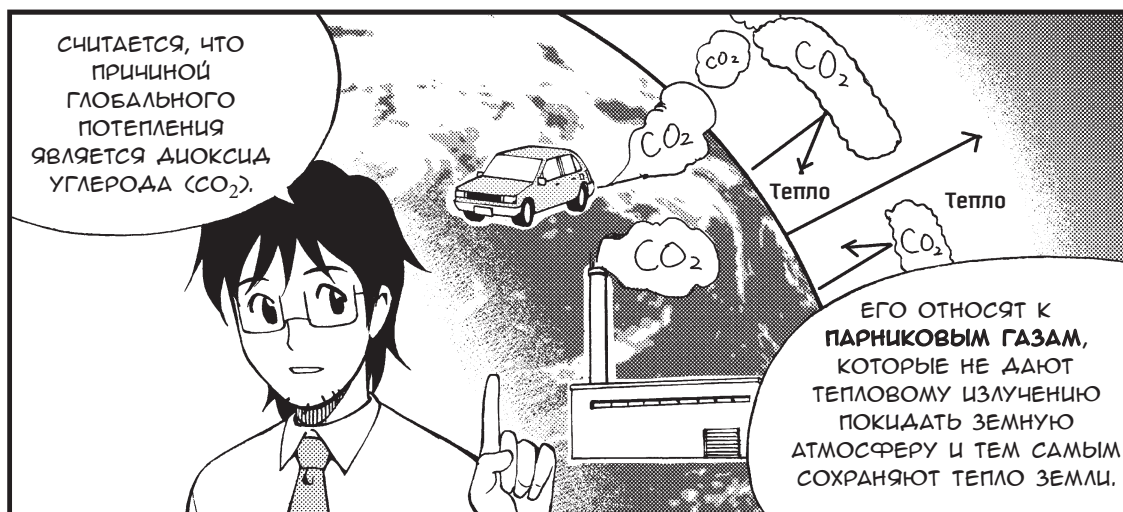
2. Вычислить экстремумы $f(x) = x^3 - 12x$.
 3. Найти производную $f'(x)$ для $f(x) = (1 - x)^3$.
 4. Вычислить максимальное значение $g(x) = x^2(1 - x)^3$ в интервале $0 \leq x \leq 1$.

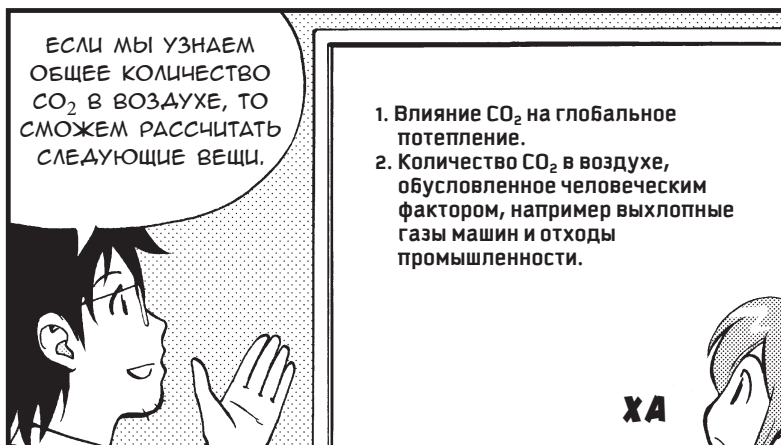
3

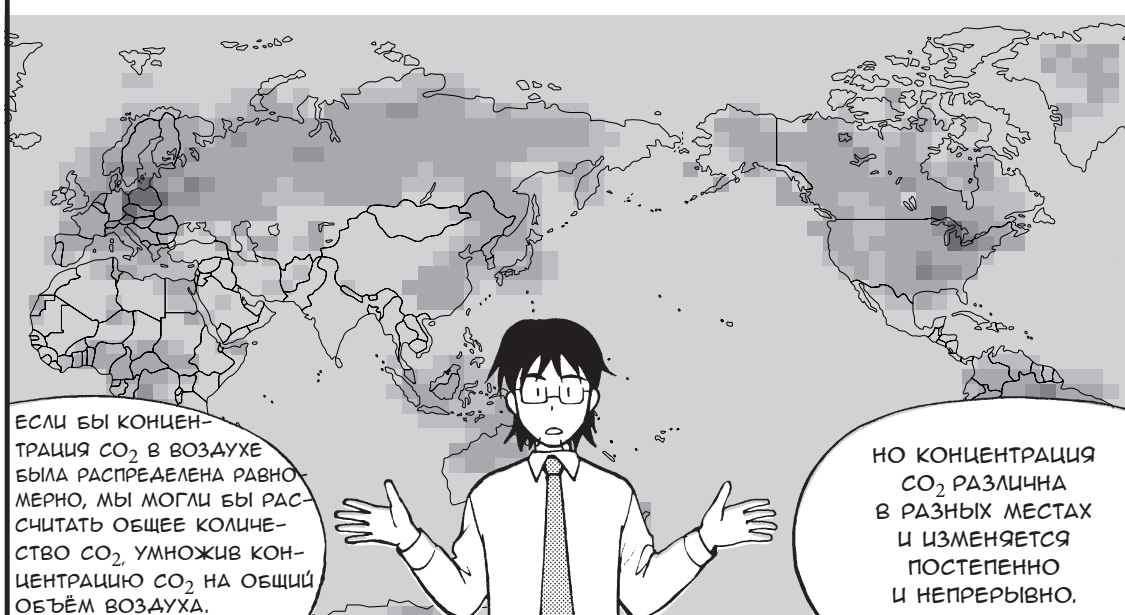
ИНТЕГРИРУЕМ ФУНКЦИИ!











* Крепкий алкогольный напиток.



3.1. НАЙДЁМ КОНЦЕНТРАЦИЮ СПИРТА

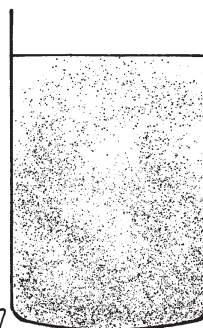


МЫ БУДЕМ
ЛИТЬ ГОРЯЧУЮ
ВОДУ В ЭТОТ
СТАКАН С СЕТЮ.

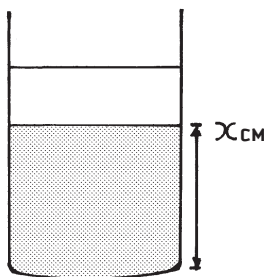


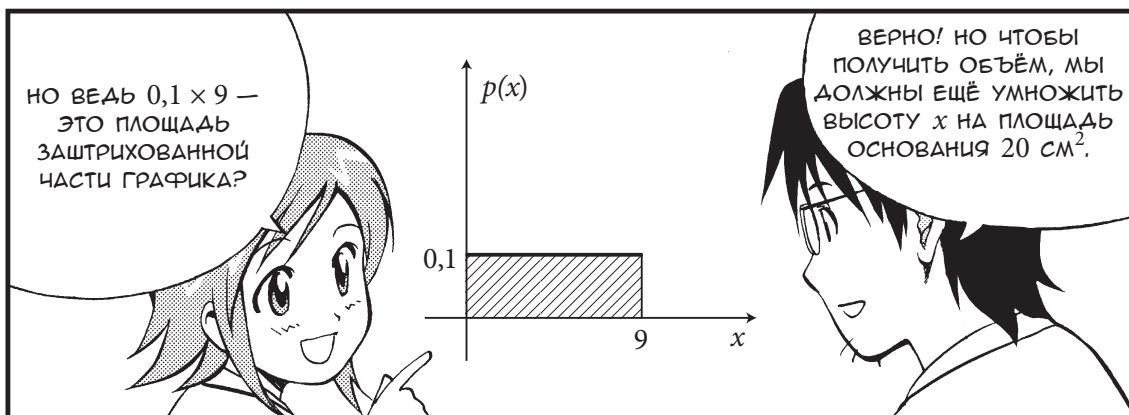
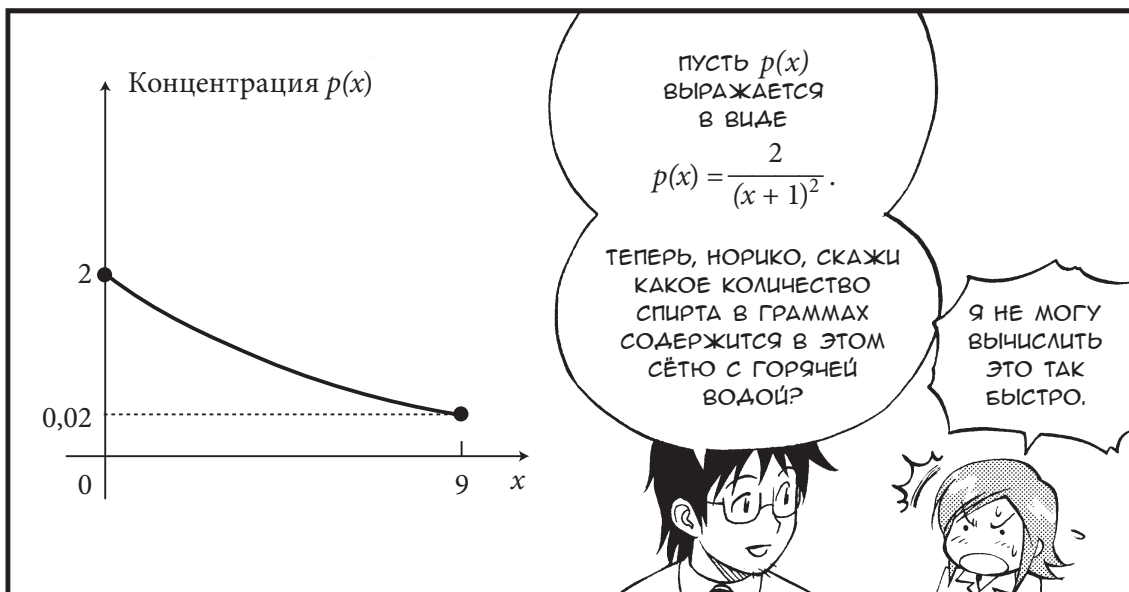
ДЕЛО В ТОМ, ЧТО КОГДА
МЫ ДОБАВЛЯЕМ
ГОРЯЧУЮ ВОДУ,
КОНЦЕНТРАЦИЯ СПИРТА
ВВЕРХУ СТАНОВИТСЯ
МЕНЬШЕ, ЧЕМ ВНИЗУ,

И КОНЦЕНТРАЦИЯ
МЕНЯЕТСЯ
ПОСТЕПЕННО
СВЕРХУ ВНИЗ



ТЕПЕРЬ ВЫРАЗИМ
КОНЦЕНТРАЦИЮ СЕТЮ
НА ВЫСОТЕ x см
ОТ ДНА, ИСПОЛЬЗУЯ
ФУНКЦИЮ $p(x)$
в г/см^3 .



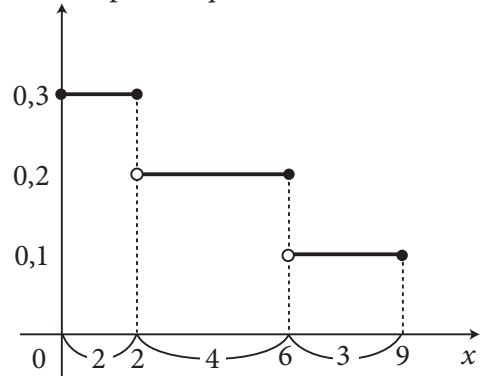


Шаг 2. Когда концентрация меняется ступенчато

ТЕПЕРЬ ПРЕДСТАВИМ
СТАКАН, В КОТОРОМ
КОНЦЕНТРАЦИЯ СПИРТА
ИЗМЕНЯЕТСЯ
СТУПЕНЧАТО...

...КАК
ПРЕДСТАВЛЕНО
НА ЭТОМ
ГРАФИКЕ,
К ПРИМЕРУ.

Концентрация $p(x)$



ПОЧЕМУ БЫ
ТЕБЕ
НЕ РАССЧИТАТЬ
ЭТО, НОРИКО?

ЛАДНО, ЭТО ПРОСТО.
ПОДСЧИТАЕМ
КОЛИЧЕСТВО СПИРТА
НА КАЖДОЙ
СТУПЕНЬКЕ, УЧИТЫВАЯ,
ЧТО ПЛОЩАДЬ
ОСНОВАНИЯ 20 см^2 ...

$$0,3 \times 2 \times 20 + 0,2 \times 4 \times 20 + 0,1 \times 3 \times 20 =$$

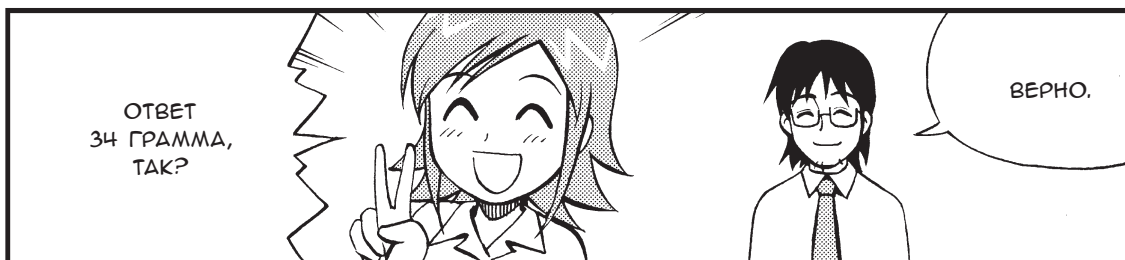
Кол-во
спирта
в области
 $0 \leq x \leq 2$

Кол-во
спирта
в области
 $2 < x \leq 6$

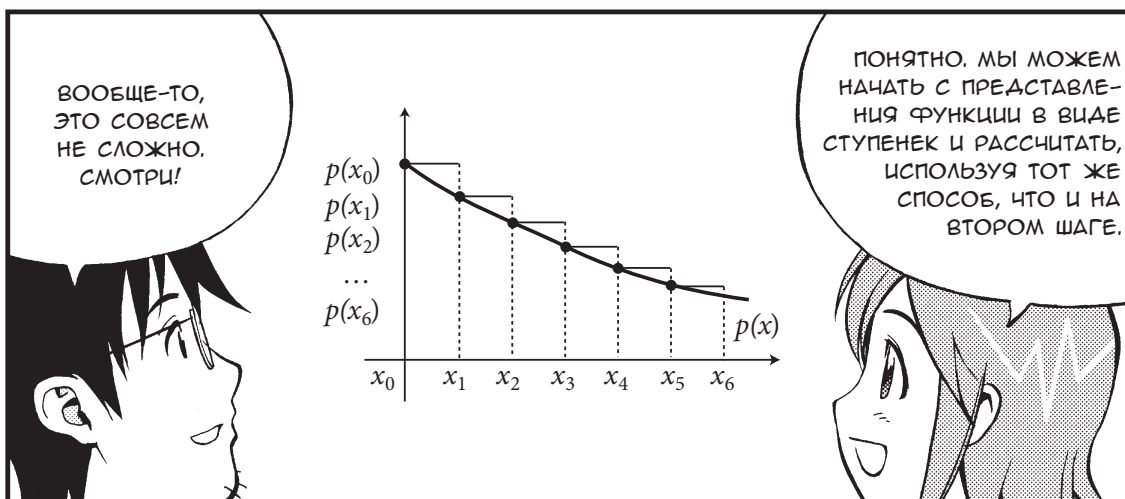
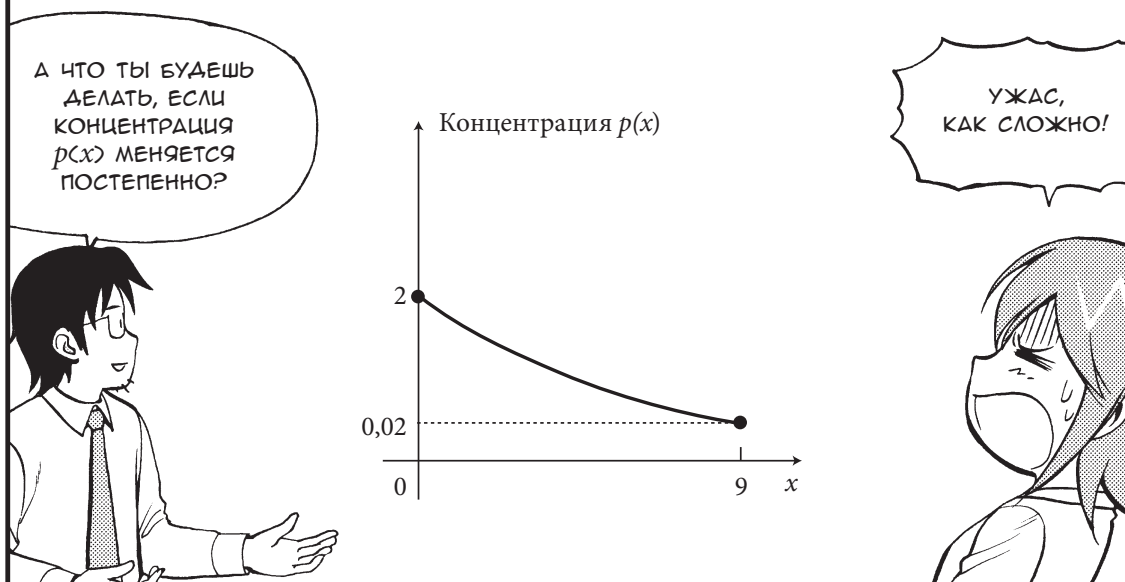
Кол-во
спирта
в области
 $6 < x \leq 9$

$$= (0,3 \times 2 + 0,2 \times 4 + 0,1 \times 3) \times 20 = 34.$$

ТАК... ПОЛУЧИЛОСЬ
34 Г



Шаг 3. Когда концентрация меняется постепенно



ВЕРНО! ОТМЕТИМ
НА ОСИ x ТОЧКИ
 $x_0, x_1, x_2, \dots, x_6, \dots$

Между x_0 и x_1 концентрация
постоянна и равна $p(x_0)$.
Между x_1 и x_2 концентрация
постоянна и равна $p(x_1)$.
Между x_2 и x_3 концентрация
постоянна и равна $p(x_2)$.

...И ПРЕДСТАВИМ $p(x)$
В ВИДЕ СТУПЕНЧАТОЙ
ФУНКЦИИ.

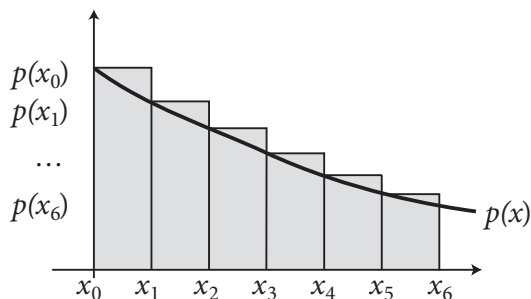
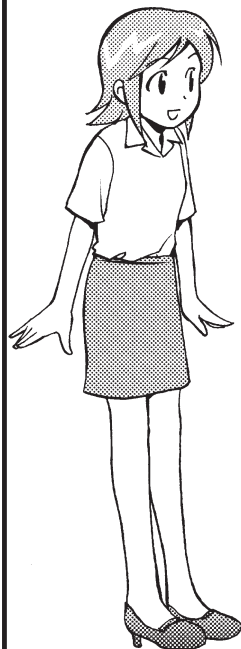
ВЫЧИСЛЕНИЕ
КОЛИЧЕСТВА СПИРТА
С ПОМОЩЬЮ ЭТОЙ
СТУПЕНЧАТОЙ ФУНКЦИИ
ДАСТ НАМ
ПРИБЛИЖЁННОЕ
ЗНАЧЕНИЕ КОЛИЧЕСТВА
СПИРТА.

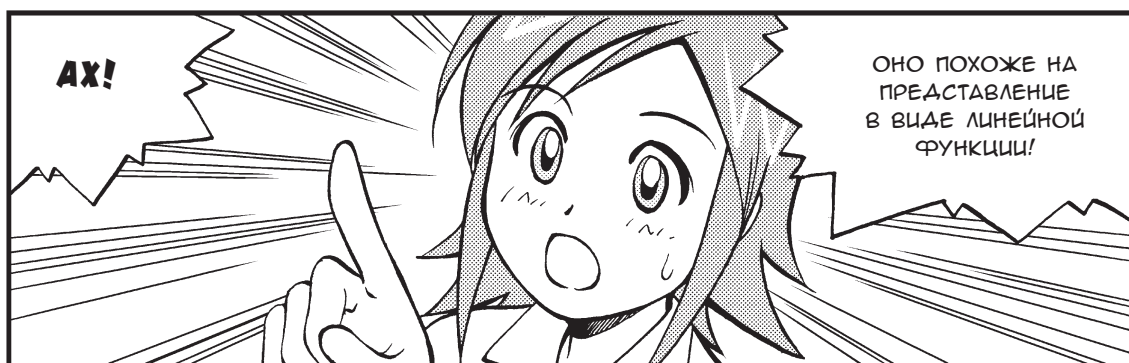
ЧЕМ БОЛЬШЕ
СТУПЕНЕК, ТЕМ
ТОЧНЕЕ. ДА?

$$+ \begin{cases} p(x_0) \times (x_1 - x_0) \times 20 \\ p(x_1) \times (x_2 - x_1) \times 20 \\ p(x_2) \times (x_3 - x_2) \times 20 \\ p(x_3) \times (x_4 - x_3) \times 20 \\ p(x_4) \times (x_5 - x_4) \times 20 \\ p(x_5) \times (x_6 - x_5) \times 20 \end{cases}$$

Приближённое
значение количества
спирта

ВЕРНО. ЗАКРАШЕННАЯ
ОБЛАСТЬ СТУПЕНЧАТОЙ
ФУНКЦИИ — СУММА
ЭТИХ ВЫРАЖЕНИЙ
(НО БЕЗ УЧЁТА
ПЛОЩАДИ ОСНОВА-
ВАНИЯ 20 см^2).





Шаг 4. Представление в виде линейной функции

Пусть $f'(x)$ — производная функции $f(x)$. Тогда вблизи $x = a$

$$f(x) \approx f'(a)(x - a) + f(a).$$

Переносим $f(a)$ влево, получаем

$$f(x) - f(a) \approx f'(a)(x - a), \quad (1)$$

то есть

$$\text{Разность } f(x) \approx \text{Производная } f'(x) \times \text{Разность } x.$$

Предположим, что разность между соседними последовательными значениями $x_0, x_1, x_2, x_3, \dots, x_6$ достаточно мала, так что x_1 стремится к x_0 , x_2 стремится к x_1 , и так далее.

Введём также новую функцию $q(x)$, производная которой равна $p(x)$:

$$q'(x) = p(x).$$

Подставляя в (1) $q(x)$ вместо $f(x)$, получаем:

$$\text{Разность } q(x) \approx \text{Производная } q'(x) \times \text{Разность } x$$

$$q(x_1) - q(x_0) \approx p(x_0)(x_1 - x_0)$$

$$q(x_2) - q(x_1) \approx p(x_1)(x_2 - x_1)$$

Сумма правых сторон этих выражений равна сумме левых сторон, при этом во время суммирования некоторые члены взаимоуничтожаются:

$$\begin{array}{l} q(x_1) - q(x_0) \approx p(x_0)(x_1 - x_0) \\ + \cancel{q(x_2) - q(x_1) \approx p(x_1)(x_2 - x_1)} \\ + \cancel{q(x_3) - q(x_2) \approx p(x_2)(x_3 - x_2)} \\ + \cancel{q(x_4) - q(x_3) \approx p(x_3)(x_4 - x_3)} \\ + \cancel{q(x_5) - q(x_4) \approx p(x_4)(x_5 - x_4)} \\ + \cancel{q(x_6) - q(x_5) \approx p(x_5)(x_6 - x_5)} \end{array}$$

$$q(x_6) - q(x_0) \approx \text{Сумма правых сторон}$$

Производя подстановку $x_6 = 9$ и $x_0 = 0$, мы получим:

$$\begin{aligned} &\text{Приближённое количество спирта} = \\ &= \text{Сумма правых сторон} \times 20 = \\ &= \{q(x_6) - q(x_0)\} \times 20 = \\ &= \{q(9) - q(0)\} \times 20. \end{aligned}$$



Шаг 5. От приближения к точному значению

ПОЛУЧЕННУЮ НАМИ СВЯЗЬ МЕЖДУ ВЫРАЖЕНИЯМИ МОЖНО ПРЕДСТАВИТЬ В ВИДЕ СХЕМЫ.



Приближённое количество спирта ($\div 20$), выраженное ступенчатой функцией:
 $p(x_0)(x_1 - x_0) + p(x_1)(x_2 - x_1) + \dots$

②

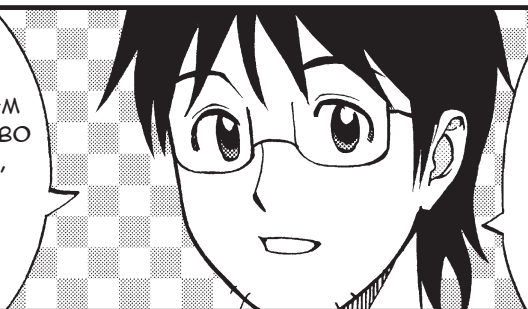
\approx

$q(9) - q(0)$
(константа)

|| ①

Точное количество спирта ($\div 20$)

ЕСЛИ ТЕПЕРЬ МЫ БУДЕМ УВЕЛИЧИВАТЬ КОЛИЧЕСТВО ТОЧЕК $x_0, x_1, x_2, x_3, \dots$, СТРЕМЯСЬ К БЕСКОНЕЧНОСТИ...



...ТО СВЯЗЬ ① ИЗ "ПРИБЛИЖЕНИЯ" ПРЕВРАТИТСЯ В "РАВЕНСТВО".

НО, ТАК КАК СУММА СТУПЕНЕК ВСЕГДА РАВНА КОНСТАНТЕ $q(9) - q(0)$...

Сумма $p(x_i)(x_{i+1} - x_i)$ при бесконечном количестве x_i

=

$q(9) - q(0)$

||

||

Точное количество спирта ($\div 20$)

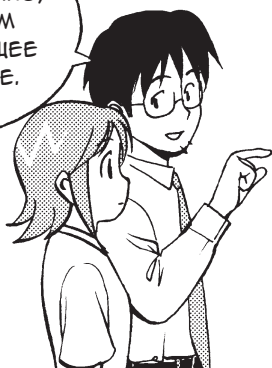


...ДИАГРАММА ПРИМЕТ ВОТ ТАКОЙ ВИД*.

* На стр. 94 приведён строгий вывод этого положения.

Шаг 6. $p(x)$ – это производная от $q(x)$

ТЕПЕРЬ, НОРИКО,
ПОСМОТРИМ
НА СЛЕДУЮЩЕЕ
ВЫРАЖЕНИЕ.

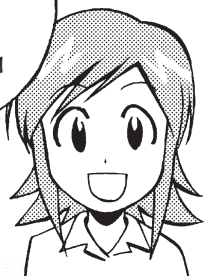


$$\text{Пусть } q(x) = -\frac{2}{x+1},$$

$$\text{тогда } q'(x) = -\frac{2}{(x+1)^2} = p(x).$$

В математике,
если $p(x)$ — производная $q(x)$,
то $q(x)$ называют *первообразной* $p(x)$.

ТАК ЭТА $q(x)$
И ЕСТЬ
ФУНКЦИЯ,
КОТОРУЮ МЫ
ИСКАЛИ.

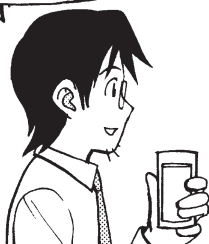


$$\text{Количество спирта} = \{q(9) - q(0)\} \times 20 =$$

$$= \left\{ -\frac{2}{9+1} - \left(-\frac{2}{0+1} \right) \right\} \times 20 = 36 \text{ г.}$$

КОЛИЧЕСТВО СПИРТА
В СТАКАНЕ СМЕСИ
СЁТЮ С ГОРЯЧЕЙ
ВОДОЙ СОСТАВЛЯЕТ
В ОБЩЕМ 36 Г.

ДА-А-А. У НАС
ОЧЕНЬ КРЕПКИЙ
НАПИТОК.



36
...



ТАК КАК СУММУ
БОЛЬШОГО ЧИСЛА
СЛАГАЕМЫХ



ОЧЕНЬ ДОЛГО
ЗАПИСЫВАТЬ,
Я ПОКАЖУ ТЕБЕ ЕЁ
ОБОЗНАЧЕНИЕ.

3.2. ОСНОВНАЯ ТЕОРЕМА ИНТЕГРИРОВАНИЯ

$$p(x_0)(x_1 - x_0) + p(x_1)(x_2 - x_1) + \dots + p(x_5)(x_6 - x_5)$$

ВЫРАЖЕНИЕ
ВВЕРХУ...

$$\sum p(x) \Delta x$$

$$x=0, 1, \dots, 9$$

...МОЖНО
ЗАПИСАТЬ
СЛЕДУЮЩИМ
ОБРАЗОМ

ОГО, ТАК
ГОРАЗДО
ПРОЩЕ

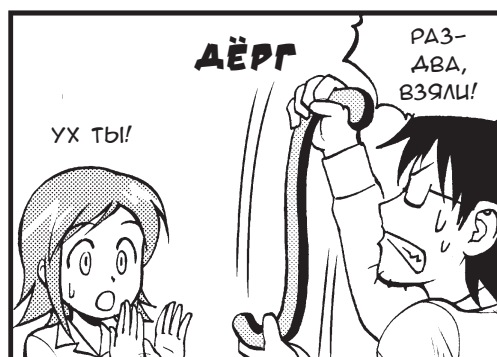
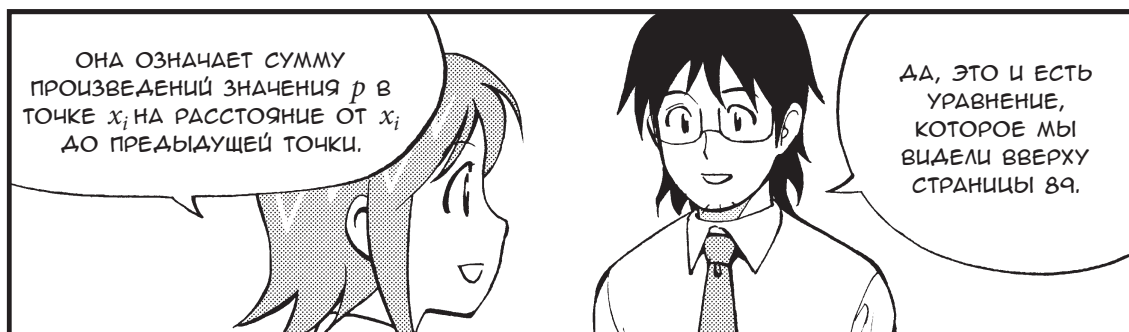
НО ЧТО
ТАКОЕ Δ ?

Δ (ДЕЛЬТА) —
ЭТО ГРЕЧЕСКАЯ
БУКВА, КОТОРАЯ
ИСПОЛЬЗУЕТСЯ
ДЛЯ ОБОЗНАЧЕНИЯ
ПРИРАЩЕНИЯ.

дельта

НАПРИМЕР,
 Δx ВЫРАЖАЕТ РАССТОЯНИЕ
ДО СЛЕДУЮЩЕЙ ТОЧКИ.
ДРУГИМИ СЛОВАМИ, ЭТО
 $(x_1 - x_0)$ ИЛИ $(x_2 - x_1)$.

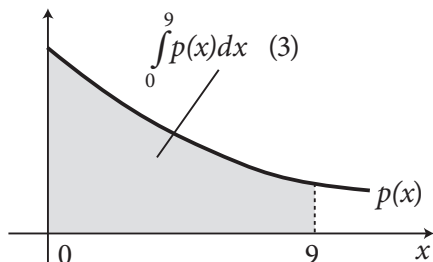
А ЧТО
НАСЧЁТ
 Σ ?



$$\sum p(x)\Delta x \rightarrow \int_0^9 p(x)\Delta x \rightarrow \int_0^9 p(x)dx$$

Я РАСТЯГИВАЮ Σ ,
ЧТОБЫ ПОЛУЧИТЬ
ЗНАК \int , И...

...ЗАМЕНЯЮ
 Δ НА d .



ВЫРАЖЕНИЕ (3) НА РИСУНКЕ
СЛЕВА ОЗНАЧАЕТ СУММИРОВАНИЕ
ПРИ РАЗБИЕНИИ НА БЕСКОНЕЧНО
МАЛЫЕ ИНТЕРВАЛЫ И РАВНО
ПЛОЩАДИ МЕЖДУ КРИВОЙ
И ОСЬЮ x .

ЭТО ВЫРАЖЕНИЕ
НАЗЫВАЮТ
**ОПРЕДЕЛЁННЫМ
ИНТЕГРАЛОМ.**

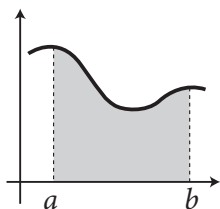
ЕСЛИ МЫ ЗНАЕМ,
ЧТО $p(x)$ — ЭТО
ПРОИЗВОДНАЯ
ОТ $q(x)$...

...ТО ЛЕГКО МОЖЕМ ВЫЧИСЛИТЬ
СУММУ, ВЕРНО?

$$\int_a^b p(x)dx = q(b) - q(a)$$

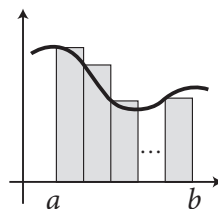
И ЗАЧЕМ МНЕ
ЭТО НУЖНО?

● Выводы ●



$$\leftarrow \int_a^b p(x)dx \approx \sum_{x=x_0, x_1, \dots, x_n} p(x)\Delta x \rightarrow$$

Остаётся найти такое $q(x)$, чтобы $q'(x) = p(x)$,
и вычислить $\int_a^b p(x)dx = q(b) - q(a)$.



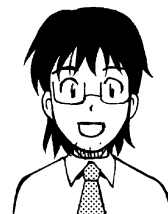
Основная теорема интегрирования!

Строгое объяснение шага 5

В ОБЪЯСНЕНИИ, ДАННОМ РАНЕЕ НА СТР. 89,
МЫ ВЗЯЛИ ЗА ОСНОВУ ВЫРАЖЕНИЕ

$$q(x_1) - q(x_0) \approx p(x_0)(x_1 - x_0).$$

ЭТО "ГРУБОЕ" ВЫРАЖЕНИЕ, ТО ЕСТЬ ГРУБОЕ
ПРЕДСТАВЛЕНИЕ ТОЧНОГО ВЫРАЖЕНИЯ. ДЛЯ ТЕХ, КТО
СЧИТАЕТ ТАКОЕ ОБЪЯСНЕНИЕ НЕДОСТАТОЧНЫМ, ПРИВЕДЁМ
БОЛЕЕ СТРОГИЙ ВЫВОД, ИСПОЛЬЗУЯ ТЕОРЕМУ О СРЕДНЕМ.



Сначала находим $q(x)$, удовлетворяющее

$$q'(x) = p(x).$$

Затем на оси x отмечаем точки

$$x_0 (= a), x_1, x_2, x_3, \dots, x_n (= b).$$

Исходя из теоремы о среднем, находим
точку x_{01} , расположенную между x_0 и x_1 и
удовлетворяющую условию

$$q(x_1) - q(x_0) = q'(x_{01})(x_1 - x_0).$$

Аналогично находим точку x_{12} между x_1 и
 x_2 , удовлетворяющую условию

$$q(x_2) - q(x_1) = q'(x_{12})(x_2 - x_1).$$

Повторяя эту операцию, получаем:

$$+ \begin{cases} q(x_1) - q(x_0) & = & q'(x_{01})(x_1 - x_0) & = & p(x_{01})(x_1 - x_0) \\ q(x_2) - q(x_1) & = & q'(x_{12})(x_2 - x_1) & = & p(x_{12})(x_2 - x_1) \\ q(x_3) - q(x_2) & = & q'(x_{23})(x_3 - x_2) & = & p(x_{23})(x_3 - x_2) \\ \dots & & \dots & & \dots \\ q(x_n) - q(x_{n-1}) & = & q'(x_{n-1 \ n})(x_n - x_{n-1}) & = & p(x_{n-1 \ n})(x_n - x_{n-1}) \end{cases}$$

$$q(x_n) - q(x_0)$$

← Всегда равны

→ Приближенное
значение площади

||

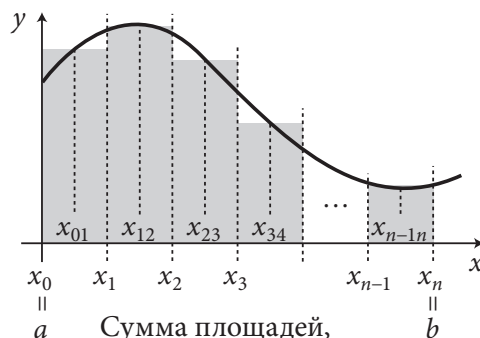
Переход к бесконечно
малым отрезкам

↓

$$q(b) - q(a)$$

← Равны

→ Точное значение
площади



3.3. ПРИМЕНЕНИЕ ФОРМУЛ ИНТЕГРИРОВАНИЯ

Основные формулы интегрирования

$$\int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx = \int_a^c f(x)dx. \quad (3.1)$$

Интервалы определённых интегралов одной функции можно объединить.

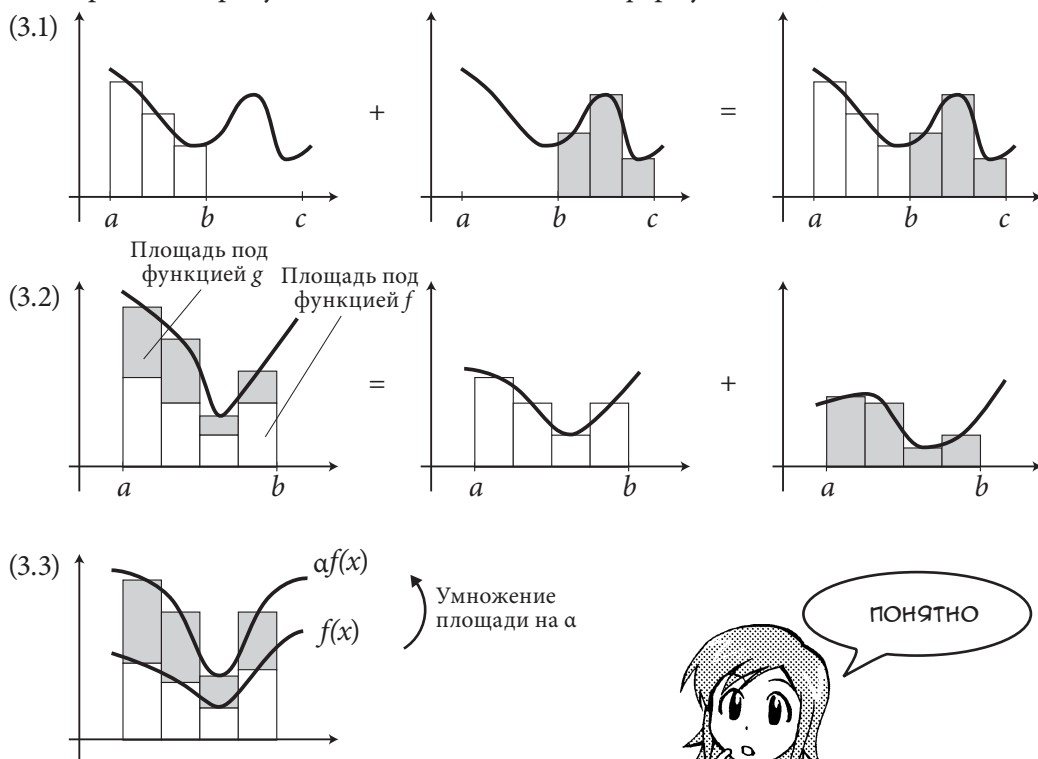
$$\int_a^b \{f(x) + g(x)\}dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx. \quad (3.2)$$

Определённый интеграл суммы можно заменить на сумму определённых интегралов.

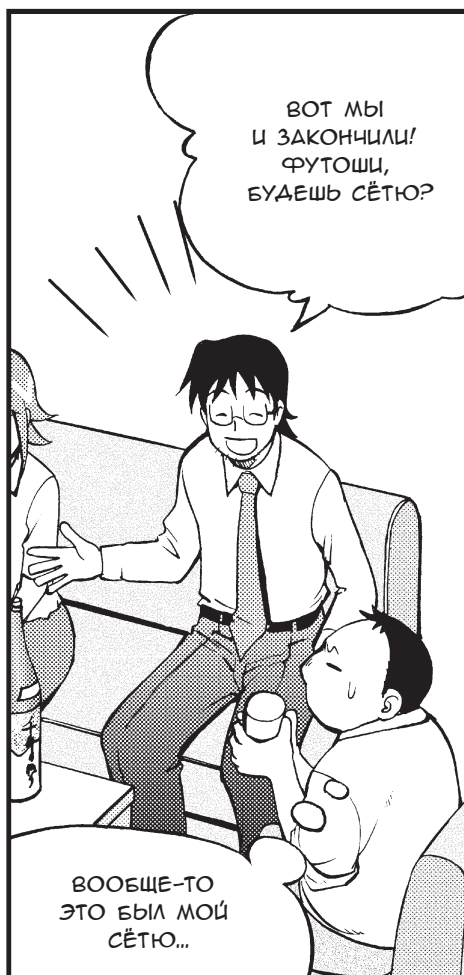
$$\int_a^b \alpha f(x)dx = \alpha \int_a^b f(x)dx. \quad (3.3)$$

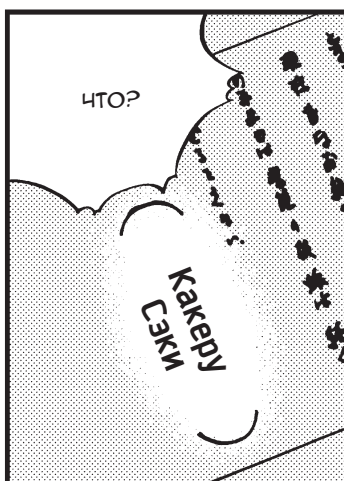
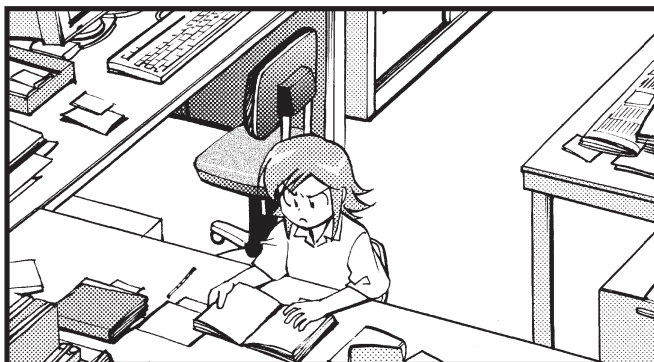
Постоянный множитель можно вынести за знак определённого интеграла.

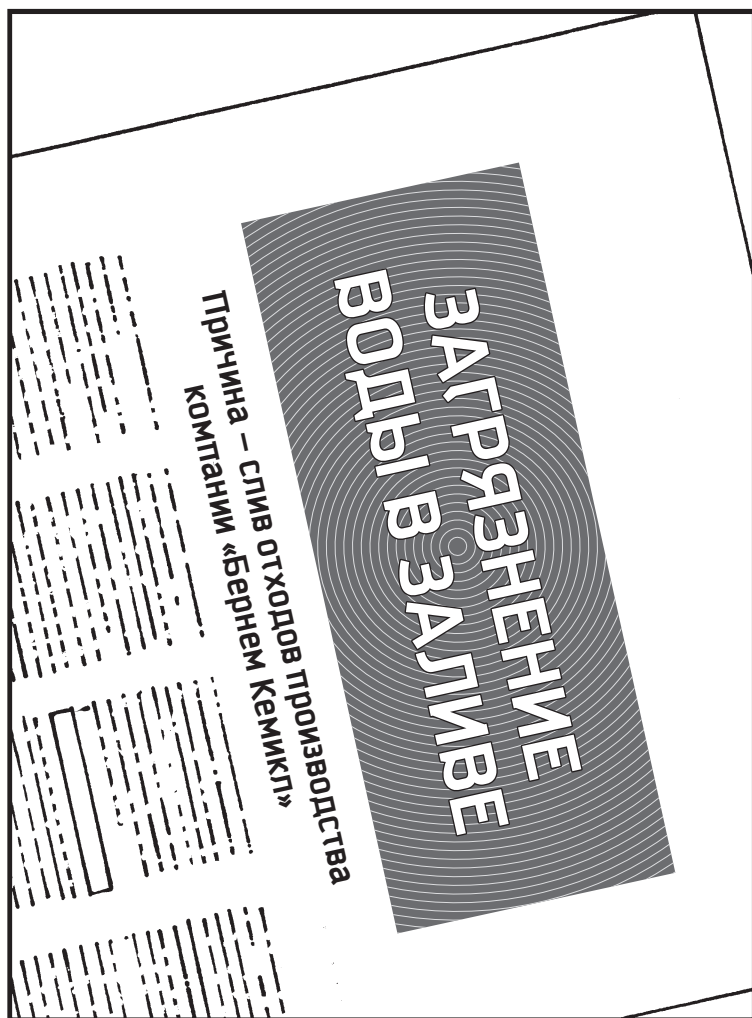
Ниже приведены рисунки, позволяющие понять формулы (3.1), (3.2) и (3.3):



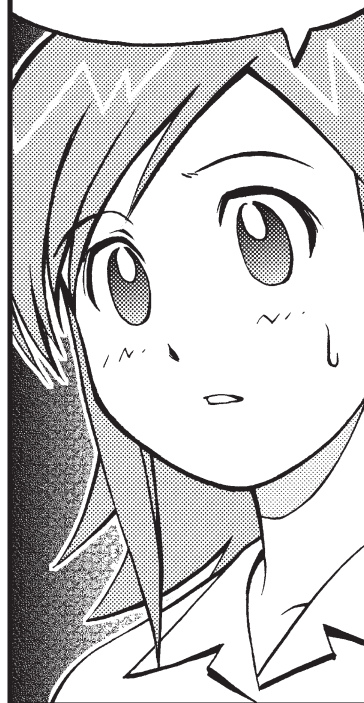
понятно





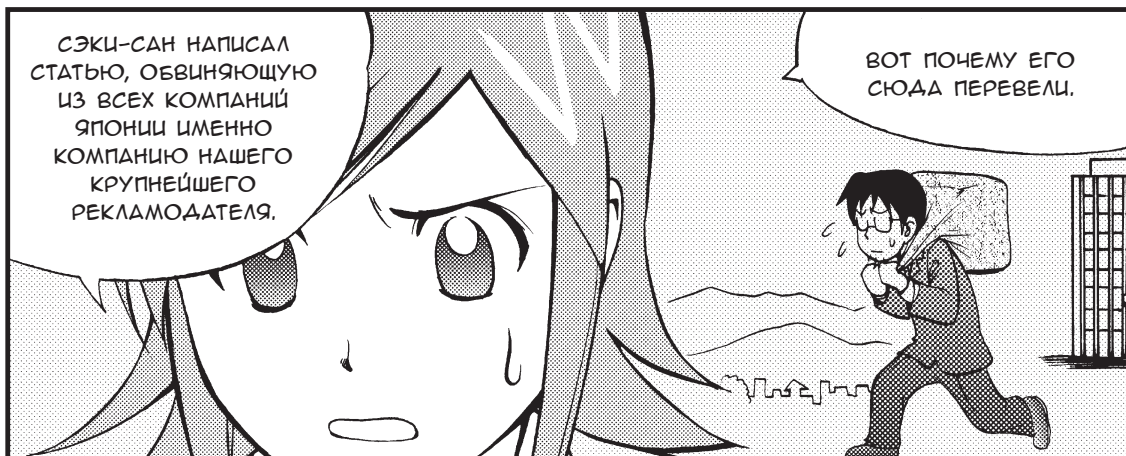


“БЕРНЕМ”... ОДИН
ИЗ СПОНСОРОВ
“АСАГАКЭ ТАЙМС”.

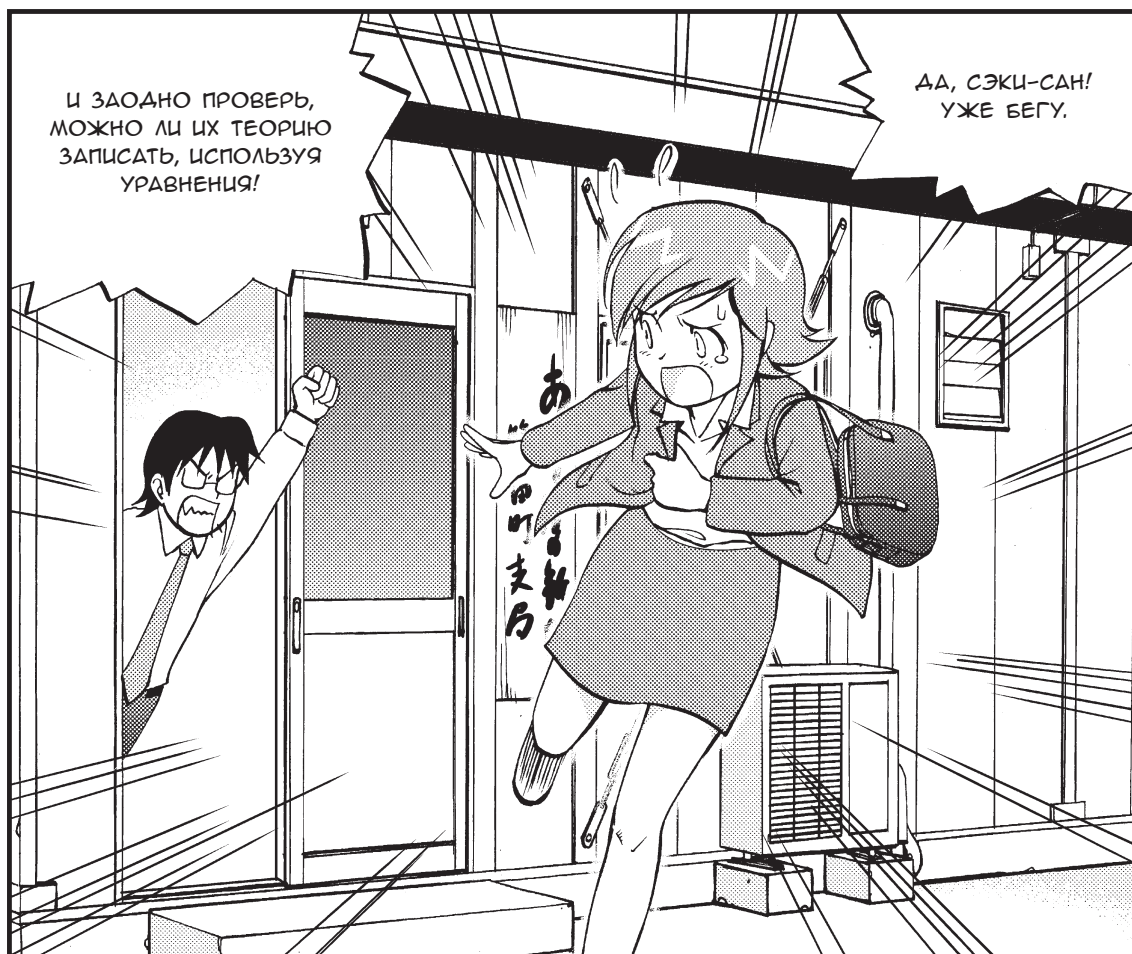


СЭКИ-САН НАПИСАЛ
СТАТЬЮ, ОБВИНЯЮЩУЮ
ИЗ ВСЕХ КОМПАНИЙ
ЯПОНИИ ИМЕННО
КОМПАНИЮ НАШЕГО
КРУПНЕЙШЕГО
РЕКЛАМОДАТЕЛЯ.

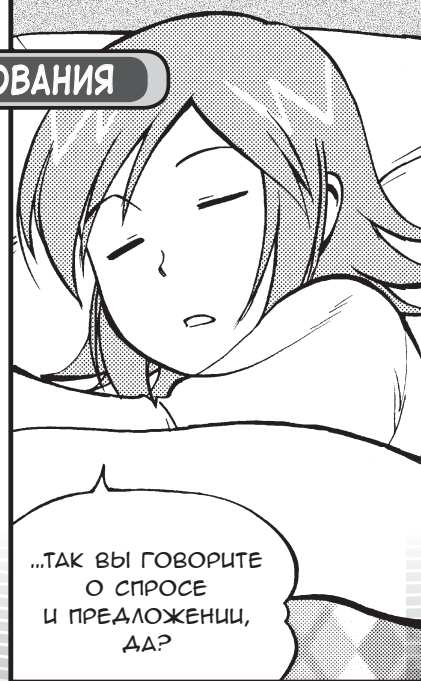
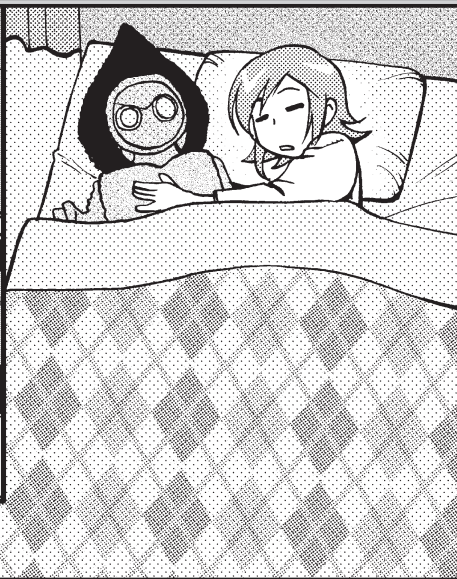
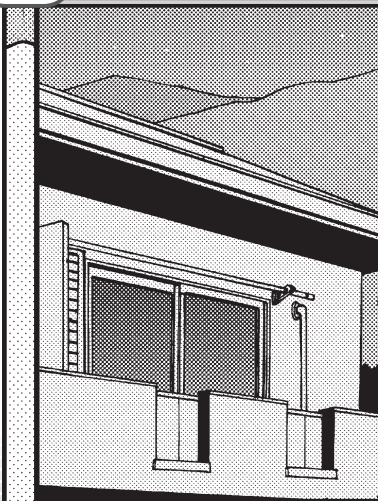
ВОТ ПОЧЕМУ ЕГО
СЮДА ПЕРЕВЕЛИ.



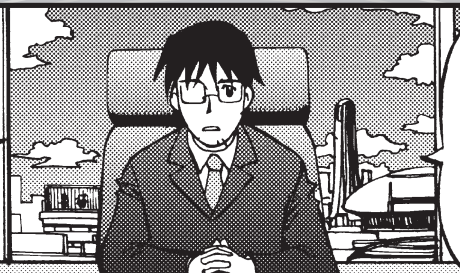




3.4. ПРИМЕНЕНИЕ ОСНОВНОЙ ТЕОРЕМЫ ИНТЕГРИРОВАНИЯ



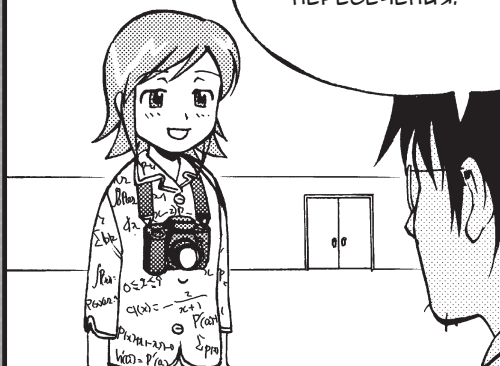
ТОЧНО! ГОВОРЯТ,
ЧТО В ЭКОНОМИКЕ
ПЕРЕСЕЧЕНИЕ КРИВЫХ
СПРОСА И
ПРЕДЛОЖЕНИЯ...



...ОПРЕДЕЛЯЕТ
КОЛИЧЕСТВО
ПРОИЗВОДИМЫХ
ТОВАРОВ И ИХ ЦЕНУ.

КОНЕЧНО,
САМА ИДЕЯ
МНЕ
ПОНЯТНА.

НО ЭТО
НЕ ОЗНАЧАЕТ,
ЧТО ТОРГОВЛЯ
ПРОИЗВОДИТСЯ
В ТОЧКЕ ИХ
ПЕРЕСЕЧЕНИЯ.



ПО ПРАВДЕ ГОВОРЯ,
ОБСЛУЖИВАНИЕ
ОБЩЕСТВА БУДЕТ
НАИЛУЧШИМ, ЕСЛИ
ТОРГОВЛЯ БУДЕТ
УДОВЛЕТВОРЯТЬ
ЭТОМУ ИДЕАЛЬНОМУ
УСЛОВИЮ.



Кривая предложения

СНАЧАЛА РАССМОТРИМ, КАК КОМПАНИИ ДОСТИГАЮТ МАКСИМАЛЬНОЙ ПРИБЫЛИ НА АБСОЛЮТНО КОНКУРЕНТНОМ РЫНКЕ. ЗОДНО ПОЛУЧИМ КРИВУЮ ПРЕДЛОЖЕНИЯ.

Прибыль $P(x)$ при производстве x единиц товара задаётся следующей функцией:

$$P(x) = p \times x - C(x)$$

Прибыль	=	Цена единицы	×	Количество продукции	−	Себестоимость производства
---------	---	-----------------	---	-------------------------	---	-------------------------------

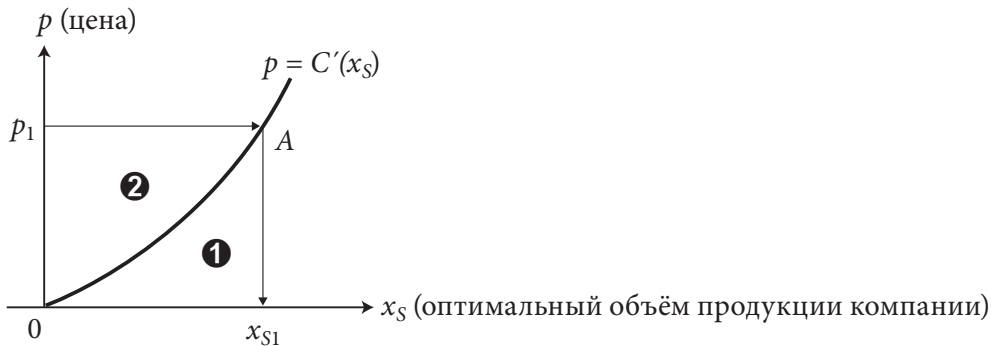


Обозначим значение количества продукции x , при котором достигается максимум прибыли $P(x)$, через x_S .

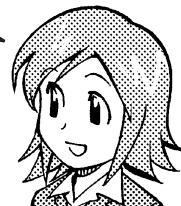
Компания хочет достичь максимальной прибыли. Вспомним, что для нахождения экстремума функции её производную надо приравнять к нулю. То есть максимальная прибыль компании достигается при

$$P'(x_S) = p - C'(x_S) = 0.$$

ГРАФИК ФУНКЦИИ $p = C'(x)$, СООТВЕТСТВУЮЩЕЙ МАКСИМАЛЬНОЙ ПРИБЫЛИ, НАЗЫВАЕТСЯ **КРИВОЙ ПРЕДЛОЖЕНИЯ!**



НА ГРАФИКЕ В ТОЧКЕ А ЦЕНА РАВНА p_1 . ЭТОЙ ЦЕНЕ СООТВЕТСТВУЕТ ОПТИМАЛЬНЫЙ ОБЪЁМ ПРОДУКЦИИ x_{S1} .



Площадь прямоугольника, ограниченного точками $(p_1, A, x_{S1}, 0)$, равна произведению цены на количество изготовленной и проданной продукции. Она равна общему доходу компании, до вычета затрат на производство. Но из графика видно, что площадь области ❶ как раз и соответствует производственным затратам, и мы можем её вычислить, используя интегрирование:

$$\int_0^{x_{S1}} C'(x_S) dx_S = C(x_{S1}) - C(0) = C(x_{S1}) = \text{Себестоимость.}$$

Применяем основную теорему интегрирования

Для упрощения считаем $C(0) = 0$

Теперь можно легко найти прибыль компании, равную площади области ❷ на графике, вычтя из площади прямоугольника $(p_1, A, x_{S1}, 0)$ площадь области ❶.

Кривая спроса

Теперь найдём максимальную выгоду покупки для потребителей.

Выгода $B(x)$, получаемая потребителями при покупке x единиц товара, задаётся следующим выражением

$B(x)$	=	$u(x)$	−	p	×	x ,
Выгода		Общие расходы		Цена единицы		Количество продукции

где функция $u(x)$ описывает суммарную величину максимальных расходов, которые готовы понести потребители при покупке товара, суммарное количество которого равно x .

Больше всего товара потребители купят при максимальном значении $B(x)$.

Чтобы найти оптимальное количество товара x_B , при покупке которого будет достигаться максимальная выгода, надо решить следующее уравнение:

$$B'(x_B) = u'(x_B) - p = 0.$$

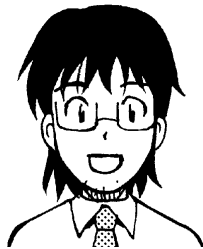
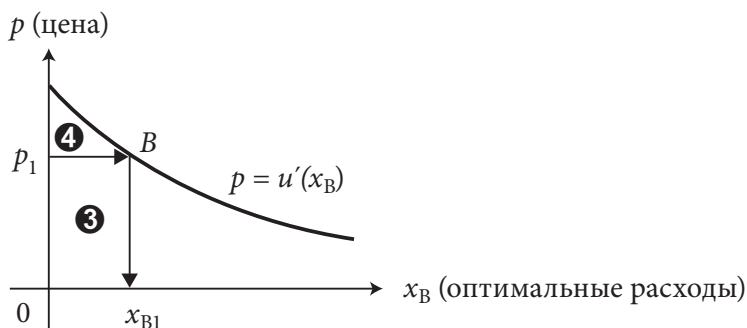


ГРАФИК ФУНКЦИИ $p = u'(x_B)$,
НАЗЫВАЕТСЯ
КРИВОЙ СПРОСА.



Рассмотрим площадь прямоугольника ③. Она равна произведению цены и количества купленных товаров и представляет собой общую стоимость купленных потребителями товаров.

Суммарную площадь областей ③ и ④ можно вычислить, применив интегрирование:

$$\int_0^{x_{B1}} u'(x_B) dx_B = u(x_{B1}) - u(0) = u(x_{B1}) = \text{Общие расходы.}$$

Применяем основную теорему интегрирования

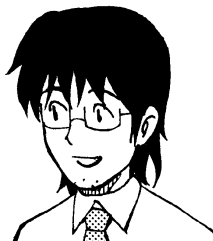
Для упрощения считаем $u(0) = 0$

Теперь мы можем найти площадь ④, соответствующую выгоде для потребителей, вычтя площадь прямоугольника ③ из полученного значения интеграла от 0 до x_{B1} .

ВЫГОДА ДЛЯ ПОТРЕБИТЕЛЕЙ (ОБЛАСТЬ ④) РАВНА РАЗНОСТИ МЕЖДУ МАКСИМАЛЬНО ПРИЕМЛЕМЫМ ДЛЯ ПОТРЕБИТЕЛЕЙ ЗНАЧЕНИЕМ РАСХОДОВ И РЕАЛЬНОЙ ОПЛАТОЙ ЗА ТОВАРЫ (ОБЛАСТЬ ③), ТАК?



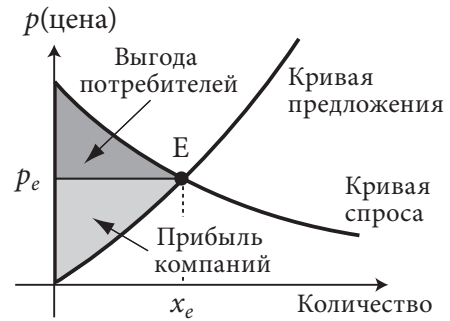
АА. ДАВАЙ ТЕПЕРЬ ОБЪЕДИНИМ КРИВЫЕ ПРЕДЛОЖЕНИЯ И СПРОСА.



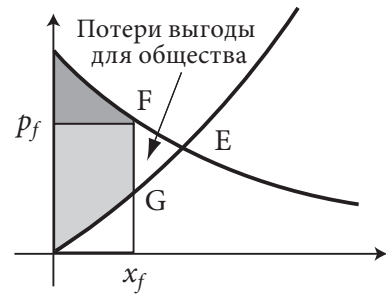
МОЖНО СКАЗАТЬ, ЧТО СУММА ПРИБЫЛИ КОМПАНИЙ И ВЫГОДА ДЛЯ ПОТРЕБИТЕЛЕЙ РАВНА ОБЩЕЙ ВЫГОДЕ ДЛЯ ОБЩЕСТВА, КОТОРОЙ НА РИСУНКЕ СООТВЕТСТВУЕТ ЗАКРАШЕННАЯ ОБЛАСТЬ.



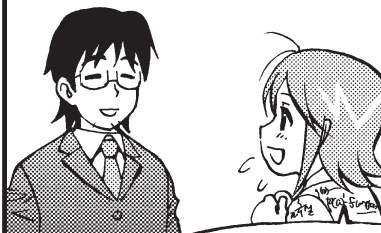
НО ЧТО БУДЕТ, ЕСЛИ ЦЕНА ТОВАРА ИЛИ ЕГО КОЛИЧЕСТВО НЕ БУДУТ СООТВЕТСТВОВАТЬ ТОЧКЕ ПЕРЕСЕЧЕНИЯ E ?



ОБЩАЯ ВЫГОДА ДЛЯ ОБЩЕСТВА УМЕНЬШИТСЯ НА ЗНАЧЕНИЕ, СООТВЕТСТВУЮЩЕЕ ПУСТОЙ ПЛОЩАДИ НА ГРАФИКЕ.

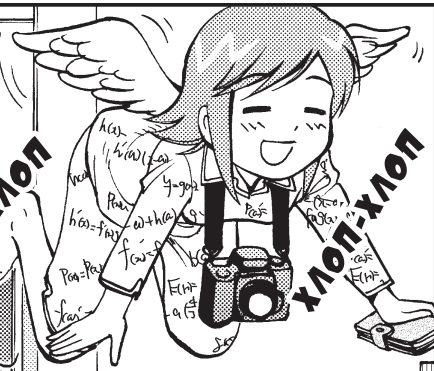


ТЫ ПОНЯЛА ЭТО?



ДА, Я ТОЖЕ БУДУ ИСПОЛЬЗОВАТЬ В СВОИХ РЕПОРТАЖАХ ИНТЕГРИРОВАНИЕ.

Я ДУМАЮ, ТЕБЕ СТОИТ НАПИСАТЬ СТАТЬЮ О СКОРОСТИ И ПАДАЮЩИХ ТЕЛАХ.



ВПЕРЕД!!!
ИНТЕГРИРОВАНИЕ — ЭТО КЛЕВО!

Наш репортёр сообщает: Интеграл скорости – это расстояние!

Интеграл от скорости	=	Разность крайних положений	=	Путь
-------------------------	---	----------------------------------	---	------

Усвоив эту формулу, мы сможем правильно находить путь, пройденный объектом, скорость которого непрерывно изменяется. Давайте проверим, так ли это? Наш многообещающий начинающий репортёр Норико Хикима убеждает нас в истинности этого утверждения в своём беспристрастном репортаже.

Читатели, возможно, помнят описанную ранее прогулку Футоши по движущейся дорожке. Не все, наверное, запомнили образ вспотевшего Футоши, но должны были запомнить, что производная пути — это скорость.

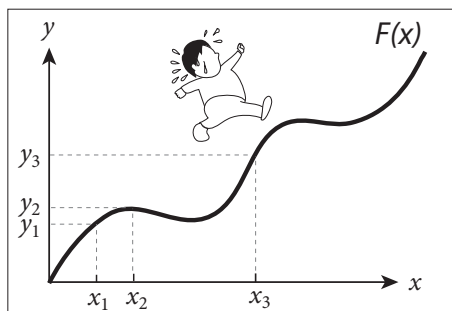


Рис. 1. График зависимости пройденного Футоши пути от времени. Он проходит точки $y_1, y_2, y_3...$ в моменты времени $x_1, x_2, x_3...$

На **Рис. 1** приведён график функции $y = F(x)$, описывающей изменение положения запыхавшегося Футоши во времени — за x секунд он перемещается в точку y .

Производная $F'(x)$ — это «мгновенная скорость» в момент времени x . Заменяя $F'(x)$ на привычное обозначение скорости $v(x)$ и используя **основную теорему интегрирования**, получаем равенство:

$$\int_a^b v(x) dx = F(b) - F(a).$$

Взглянем на график $v(x)$ на **Рис. 2, а**, отражающий изменение скорости Футоши во времени. Закрашенная часть этого графика равна интегралу в левой части нашего равенства. Теперь, если мы посмотрим на **Рис. 2, б**, то увидим, что пройденный путь, определяемый как разность положений, равен закрашенной области, то есть интегралу скорости!

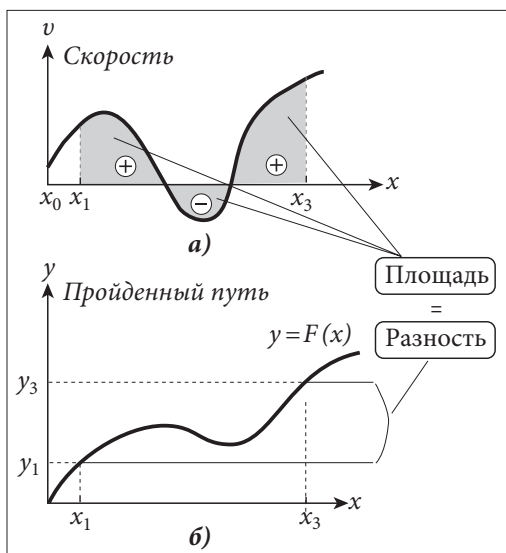
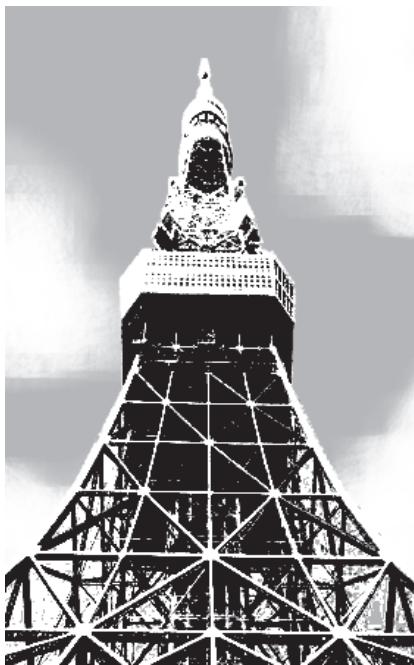


Рис. 2. Графики скорости и пути.

Обратим также внимание на то, что пройденный путь увеличивается, когда скорость Футоши положительна, и уменьшается, когда отрицательна (то есть в это время Футоши возвращался).

Сенсация: Свободное падение тела с Токийской башни

Сколько секунд до земли?



Мы знаем, что брошенное тело обязательно упадёт на землю. При этом оно будет ускоряться под действием силы притяжения к Земле, то есть его скорость будет постоянно меняться. Для описания этого движения воспользуемся интегрированием.

Для наглядности рассмотрим более масштабный бросок — с самого верха Токийской башни. Найдём, за сколько секунд тело достигнет земли. Для этого нам совсем не обязательно следовать совету Футоши: «Почему бы вам не пойти на Токийскую башню с секундомером и не измерить это время?»

Увеличение скорости при свободном падении тела вызвано ускорением свободного падения, равным $9,8 \text{ м/с}^2$. Други-

ми словами, скорость тела каждую секунду увеличивается на $9,8 \text{ м/с}$. Не будем выяснять, откуда берётся именно это значение, просто воспользуемся им.

Мы знаем, что интеграл скорости — это разность положений (или пройденный телом путь). Воспользуемся основной теоремой интегрирования и запишем выражение для вычисления расстояния, которое пролетит тело за T секунд падения:

$$F(T) - F(0) = \int_0^T v(x) dx = \int_0^T 9,8x dx.$$

Интеграл от 0 до T равен закрашенной площади на **Рис. 3**, которая в свою очередь равна половине произведения $9,8t$ на t , то есть $0,5 \times 9,8t \times t$.

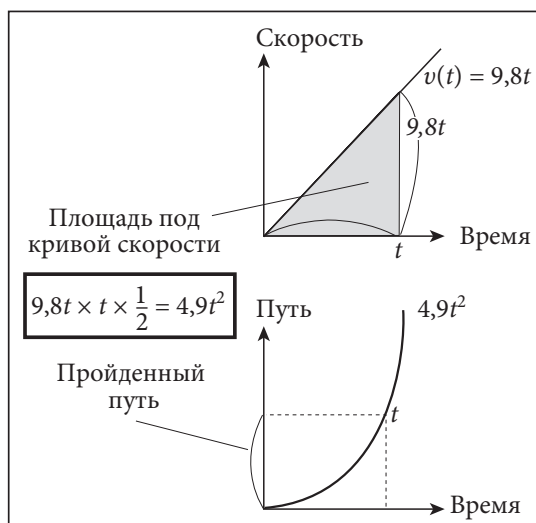


Рис. 3.

В результате получаем:

$$F(T) - F(0) = 4,9T^2 - 4,9 \times 0^2 = 4,9T^2.$$

Так как высота башни Токио 333 м, то:

$$333 = 4,9T^2 \rightarrow T = \sqrt{333/4,9} = 8,2 \text{ с.}$$

Тело достигнет земли через 8.2 с.

При решении мы пренебрегли для простоты сопротивлением воздуха.

Независимое расследование Норико Хикимы:

Мечем кости!

Ещё одно применение основной теоремы интегрирования.

Многие, наверняка, играли в детстве в кости — кубики с цифрами от 1 до 6. С давних времен эти кубики путешествовали по всему миру, не только принося удачу в азартных играх, но и предсказывая судьбу.

С точки зрения математики кости — это компактный генератор случайных чисел. Воспользуемся этим и будем бросать кости, чтобы ещё раз проверить формулу интегрирования! На костях могут выпасть цифры 1, 2, 3, 4, 5 или 6. Вероятность выпадения любой цифры равна $1/6$, что изображено в виде гистограммы на Рис. 4 (по оси x — цифры, по оси y — вероятность).

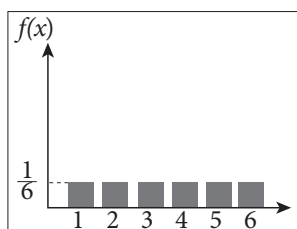


Рис. 4. Функция плотности вероятности.

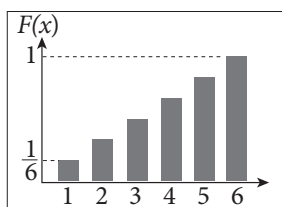


Рис. 5. Функция распределения вероятности.

Функция $f(x)$ равна вероятности выпадения цифры x , например $f(4) = 1/6$ (веро-

ятность выпадения цифры 4 равна $1/6$). На Рис. 5 изображена функция распределения вероятности.

Рассмотрим её подробнее. Так как на костях нет цифр меньше 1, то в интервале от 0 до 1 вероятность равна нулю. В точке $x = 1$ происходит скачок до $1/6$. В интервале от 1 до 2 вероятность не изменяется, а в точке $x = 2$ происходит очередной скачок на $1/6$, увеличивая вероятность до $2/6$. Продвигаясь далее по оси x , мы дойдём до вероятности 1 в точке $x = 6$. Другими словами, вероятность выпадения цифры меньше или равной 6 равна 1.

На Рис. 6 показано, как можно графически найти вероятность выпадения чисел, больших 2 и меньших либо равных 5.

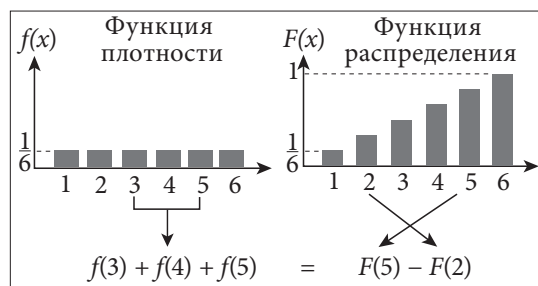
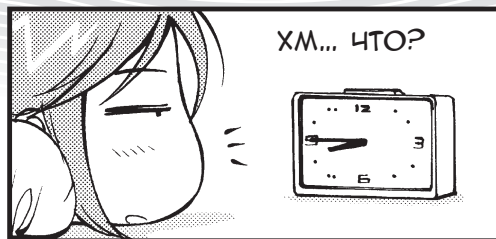
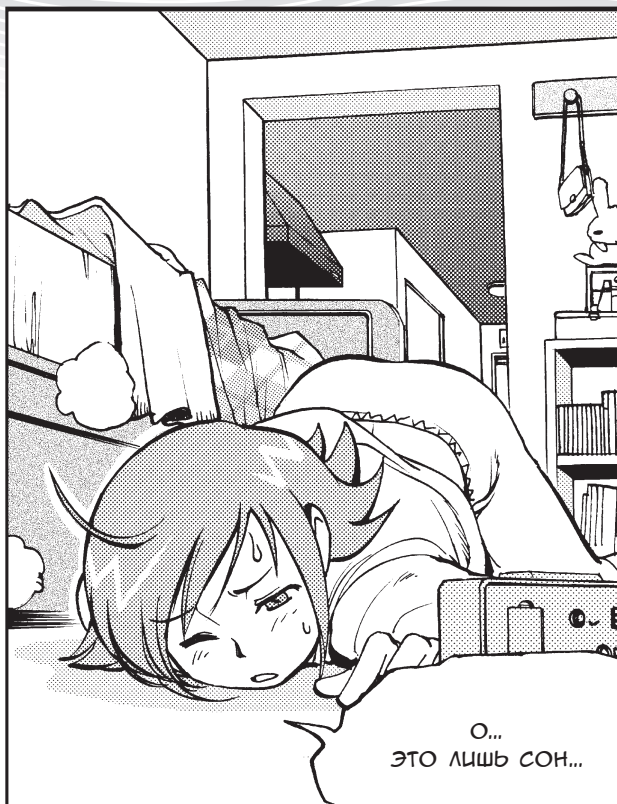
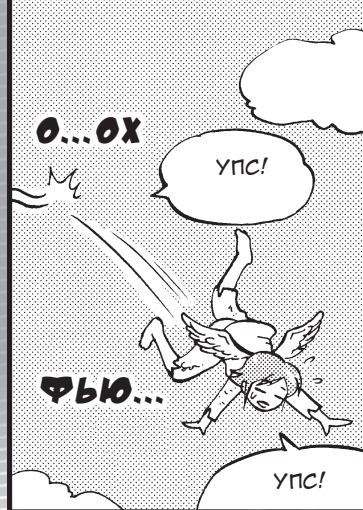


Рис. 6. Производная функции распределения равна функции плотности вероятности $F'(x) = f(x)$.

Из Рис. 6 мы видим, что для нахождения вероятности выпадения x в интервале $a \leq x \leq b$ можно использовать формулу:

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a).$$

Мы опять получили основную теорему интегрирования! И это означает, что $f(x)$ есть не что иное, как производная $F(x)$. Метание костей — великолепное занятие!



3.5. СВОДКА ПО ОСНОВНОЙ ТЕОРЕМЕ ИНТЕГРИРОВАНИЯ

Если функция $f(x)$ — производная функции $F(x)$, то есть

$$F'(x) = f(x),$$

то

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)$$

или

$$\int_a^b F'(x) dx = F(b) - F(a).$$

Эти формулы означают следующее:

Интеграл производной
от исходной функции
на отрезке от a до b

=

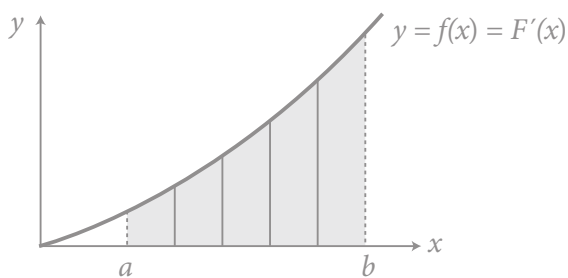
Разность между значениями
исходной функции
в точках b и a

Используя графический подход, это равенство можно записать так:

Площадь фигуры, образованной графиком
производной от исходной функции,
осью x и вертикальными отрезками,
построенными из точек $x = a$ и $x = b$

=

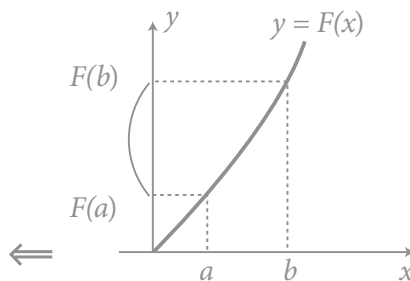
Приращение значений
исходной функции
на отрезке от a до b



Основная теорема
интегрирования



$$\int_a^b f(x) dx$$



Разность значений
исходной функции

Интегрирование методом подстановки

Найдём, как изменится выражение для определённого интеграла по x

$$S = \int_a^b f(x) dx,$$

если вместо переменной x подставить функцию, выражающую x через переменную y

$$x = g(y).$$

Запишем формулу, выражающую определённый интеграл через сумму ступенчатой функции:

$$S \approx \sum_{k=0, 1, \dots, n-1} f(x_k)(x_{k+1} - x_k) \quad (x_0 = a, x_n = b).$$

Заменяя переменную x на $x = g(y)$, мы перейдём к новой переменной y и получим следующие значения точек разбиения

$$y_0 = \alpha, y_1, y_2, \dots, y_n = \beta,$$

удовлетворяющие соотношениям

$$a = g(\alpha), x_1 = g(y_1), x_2 = g(y_2), \dots, b = g(\beta).$$

Используя приближённую линейную функцию, выразим приращение x через приращение y :

$$x_{k+1} - x_k = g(y_{k+1}) - g(y_k) \approx g'(y_k)(y_{k+1} - y_k)$$

и подставим его в выражение для S :

$$S \approx \sum_{k=0, 1, \dots, n-1} f(x_k)(x_{k+1} - x_k) \approx \sum_{k=0, 1, \dots, n-1} f(g(y_k))g'(y_k)(y_{k+1} - y_k).$$

Переход от суммы к интегралу при бесконечном числе разбиений даст нам следующую формулу:

$$S = \int_{\alpha}^{\beta} f(g(y))g'(y)dy.$$

Таким образом, мы получили формулу для интегрирования методом подстановки.

Интегрирование методом подстановки

Если $x = g(y)$, то	$\int_a^b f(x) dx = \int_{\alpha}^{\beta} f(g(y))g'(y) dy.$	(3.4)
----------------------	---	-------

Пример

Вычислить

$$\int_0^1 10(2x + 1)^4 dx.$$

Заменим переменную x на $y = 2x + 1$. Тогда $x = g(y) = 1/2 (y - 1)$.

Дифференцируя правую и левую части уравнения $y = 2x + 1$, мы получим:

$$dy = 2dx,$$

или

$$dx = 1/2 dy.$$

Перепишем теперь интеграл, используя новую переменную y и учитывая, что границы интегрирования изменились. Заменяем 0 на $2 \times 0 + 1 = 1$ и 1 на $2 \times 1 + 1 = 3$.

Тогда

$$\int_0^1 10(2x + 1)^4 dx = \int_1^3 10y^4 \cdot 1/2 dy = \int_1^3 5y^4 dy = 3^5 - 1^5 = 242.$$

3.6. УПРАЖНЕНИЯ К ГЛАВЕ 3

1. Найдите определённый интеграл

1) $\int_2^3 3x^2 dx.$

2) $\int_2^4 \frac{x^3 + 1}{x^2} dx.$

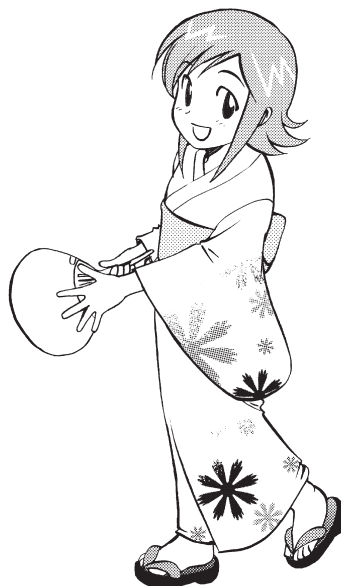
3) $\int_0^5 (x + (1 + x^2)^7) dx + \int_0^5 (x - (1 + x^2)^7) dx.$

2. Ответьте на вопросы

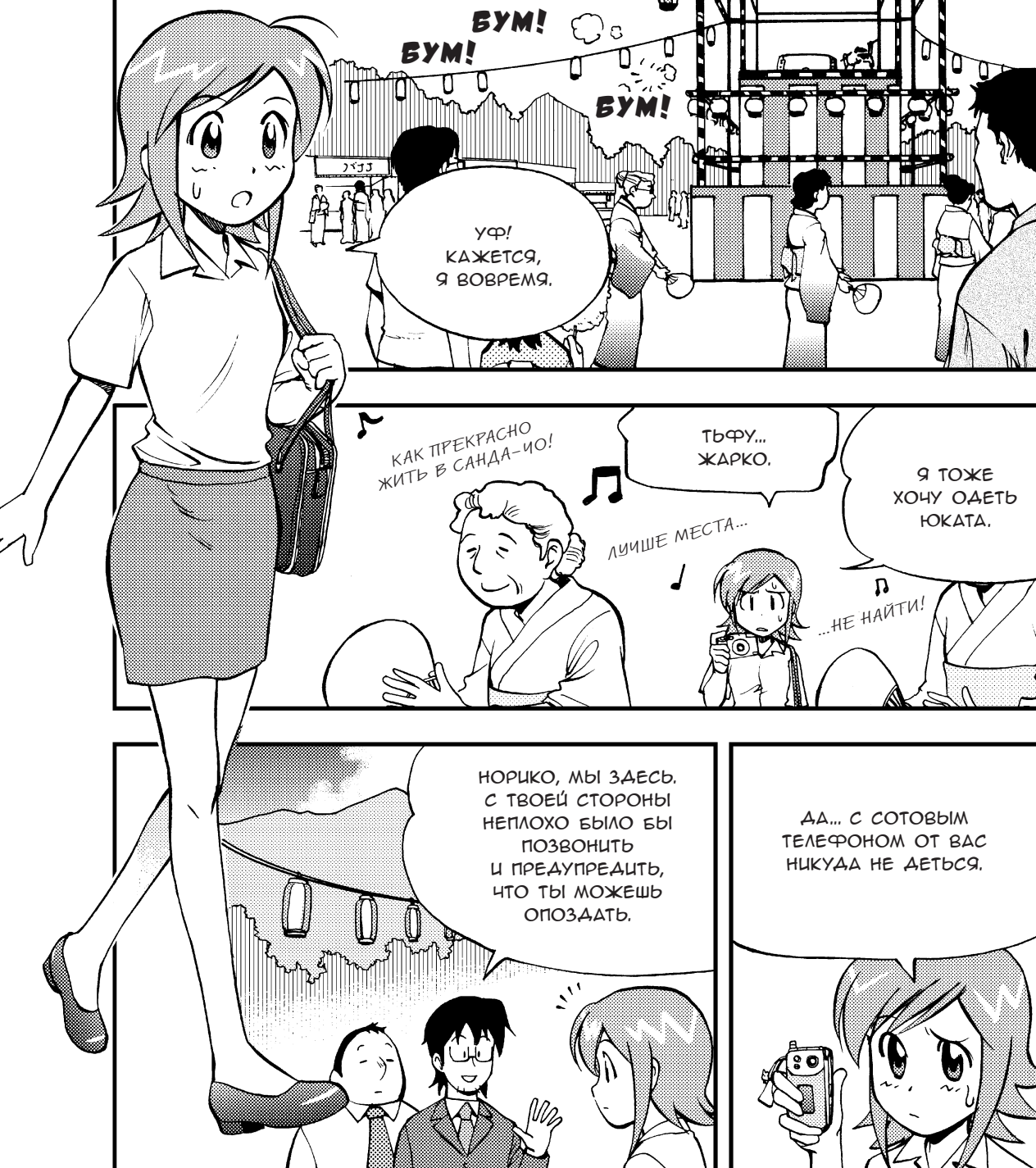
- 1) Запишите выражение для определённого интеграла, равного площади фигуры, ограниченной кривой функции $y = f(x) = x^2 - 3x$ и осью x .
- 2) Найдите площадь фигуры из предыдущего задания.

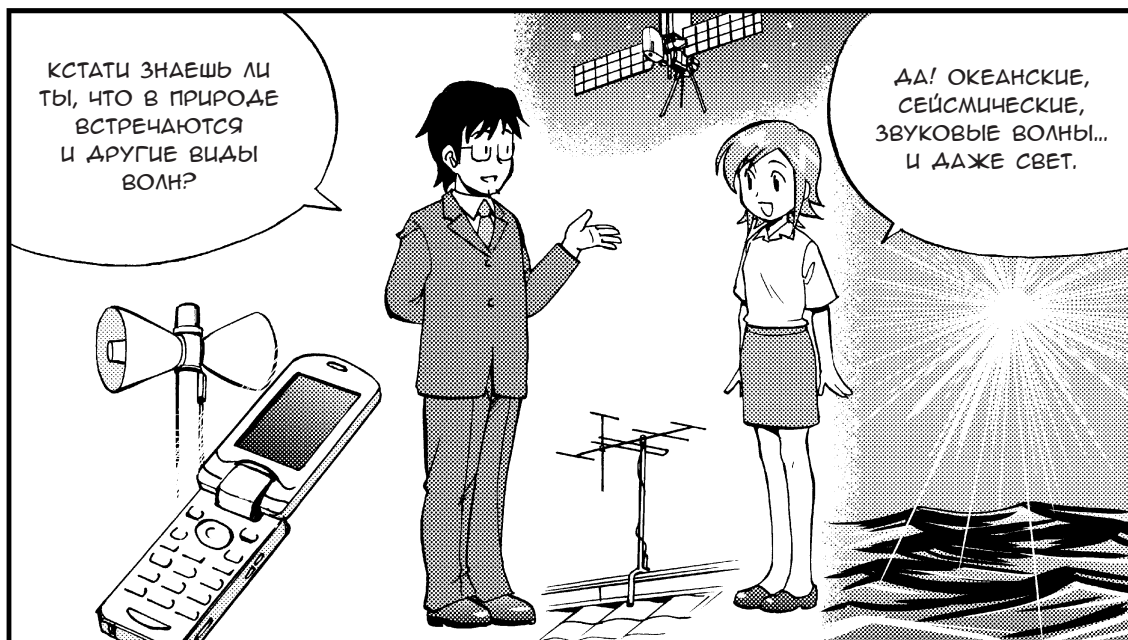
4

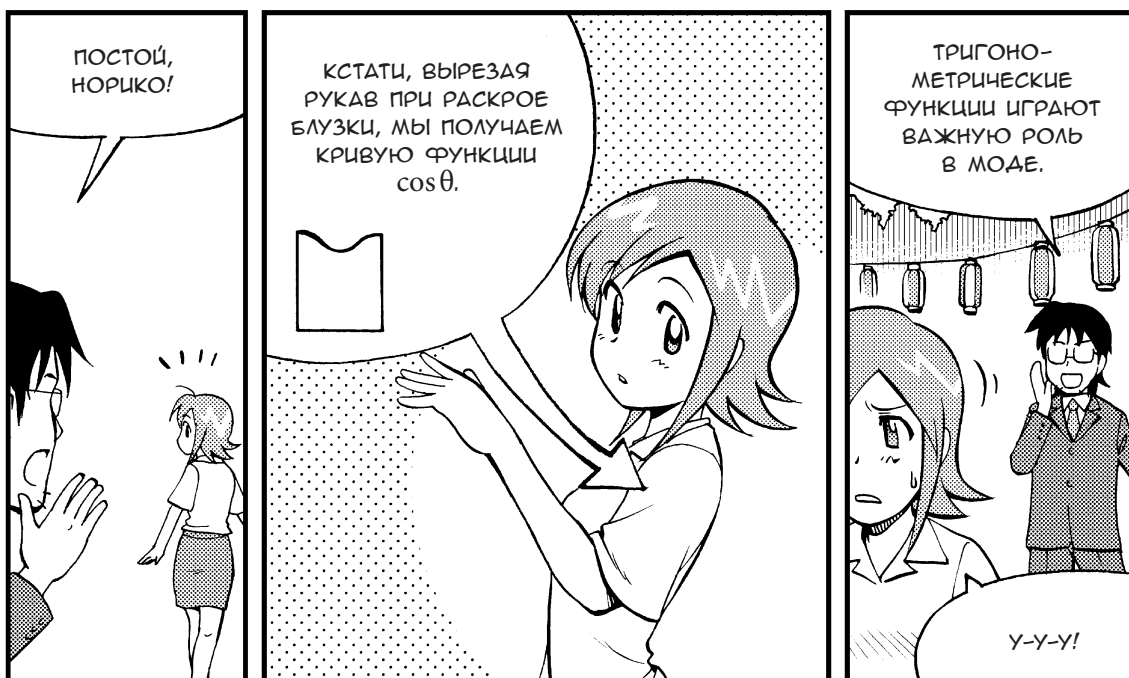
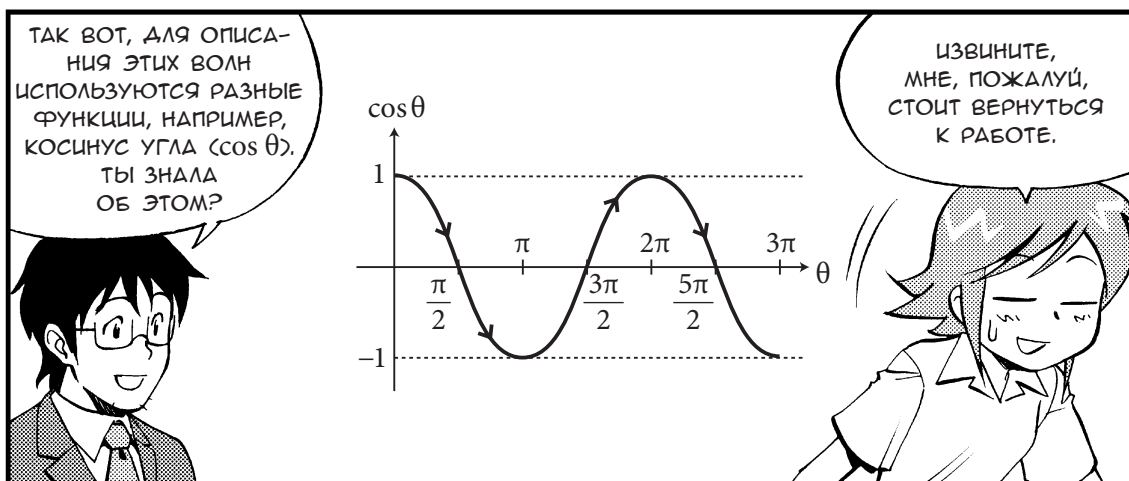
ИЗУЧАЕМ ПРИЁМЫ ИНТЕГРИРОВАНИЯ!

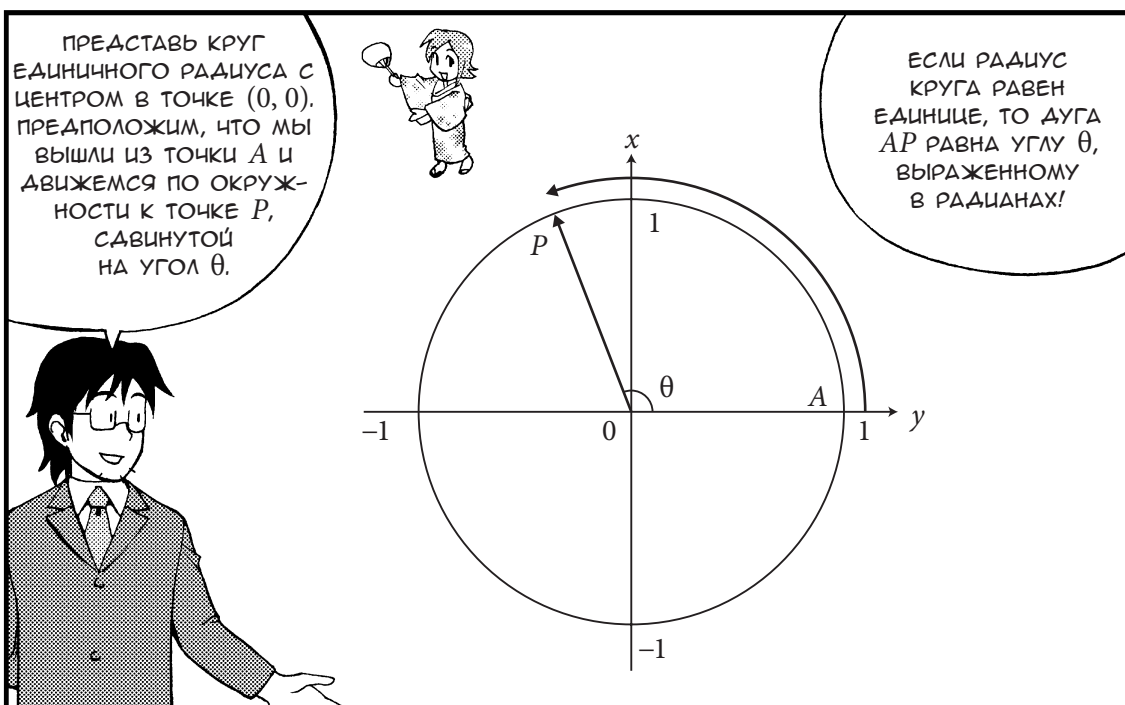
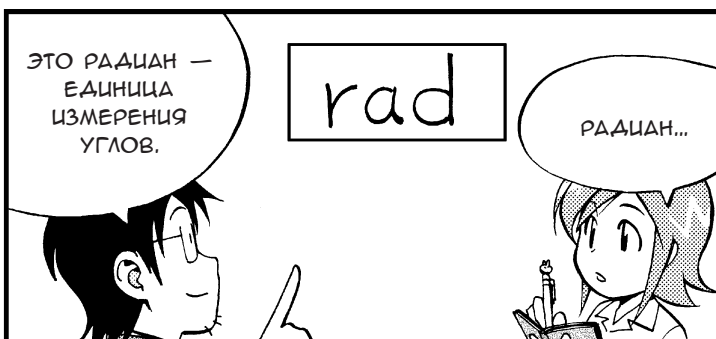


4.1. ТАНЦЫ И ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ









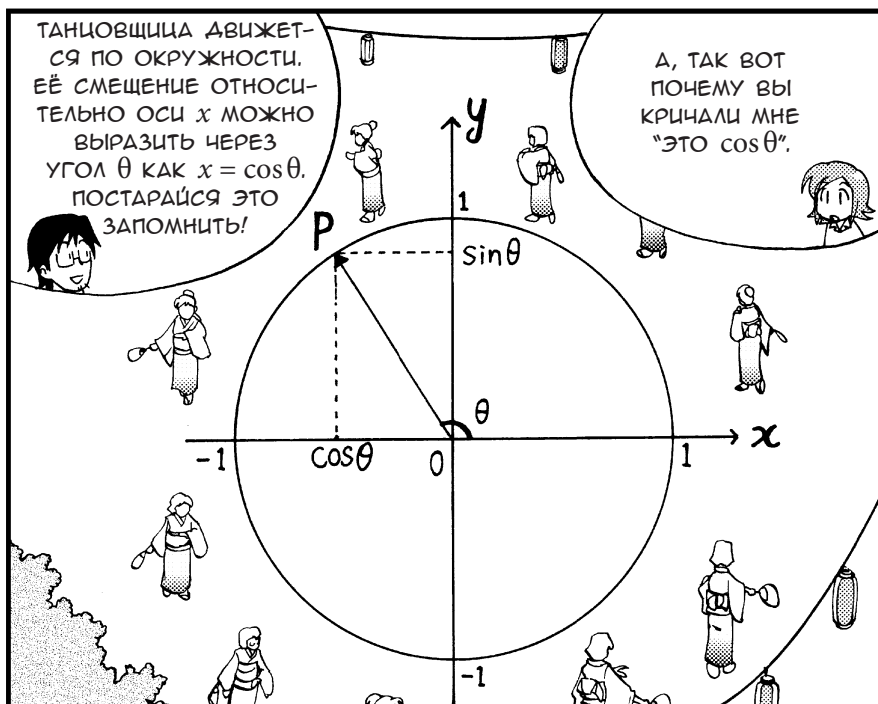
ВСЯ ОКРУЖНОСТЬ РАВНА 360° , ИЛИ 2π В РАДИАНАХ. ОТСЮДА ПОЛУЧАЕМ, ЧТО $90^\circ = \pi/2$, А $180^\circ = \pi$. ОДИН РАДИАН РАВЕН ПРИМЕРНО $57,2958^\circ$.

В ДАЛЬНЕЙШЕМ ВСЕ УГЛЫ БУДЕМ ИЗМЕРЯТЬ В РАДИАНАХ.

ТАНЦОВЩИЦА ДВИЖЕТСЯ ПО ОКРУЖНОСТИ. ЕЁ СМЕЩЕНИЕ ОТНОСИТЕЛЬНО ОСИ x МОЖНО ВЫРАЗИТЬ ЧЕРЕЗ УГОЛ θ КАК $x = \cos \theta$. ПОСТАРАЙСЯ ЭТО ЗАПОМНИТЬ!

А, ТАК ВОТ ПОЧЕМУ ВЫ КРИЧАЛИ МНЕ "ЭТО $\cos \theta$ ".

ЧТО ТВОРИТСЯ В ЕГО ГОЛОВЕ? СПЛОШНЫЕ КОСИНУСЫ...

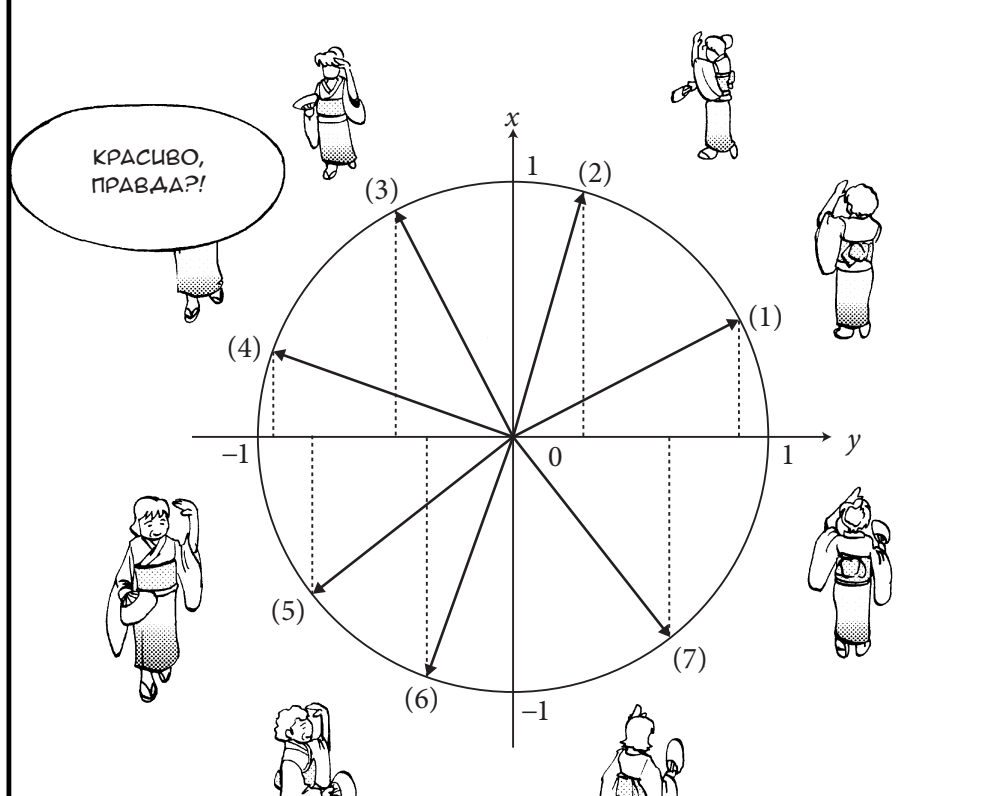


АНАЛОГИЧНО, СМЕЩЕНИЕ ТАНЦОВЩИЦЫ ПО ВЕРТИКАЛИ МОЖЕТ БЫТЬ ВЫРАЖЕНО ФУНКЦИЕЙ $y = \sin \theta$.

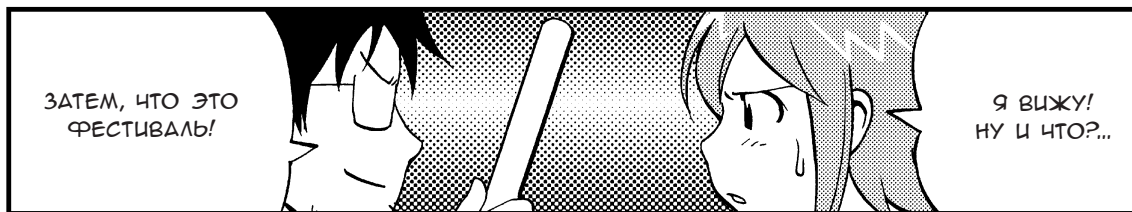
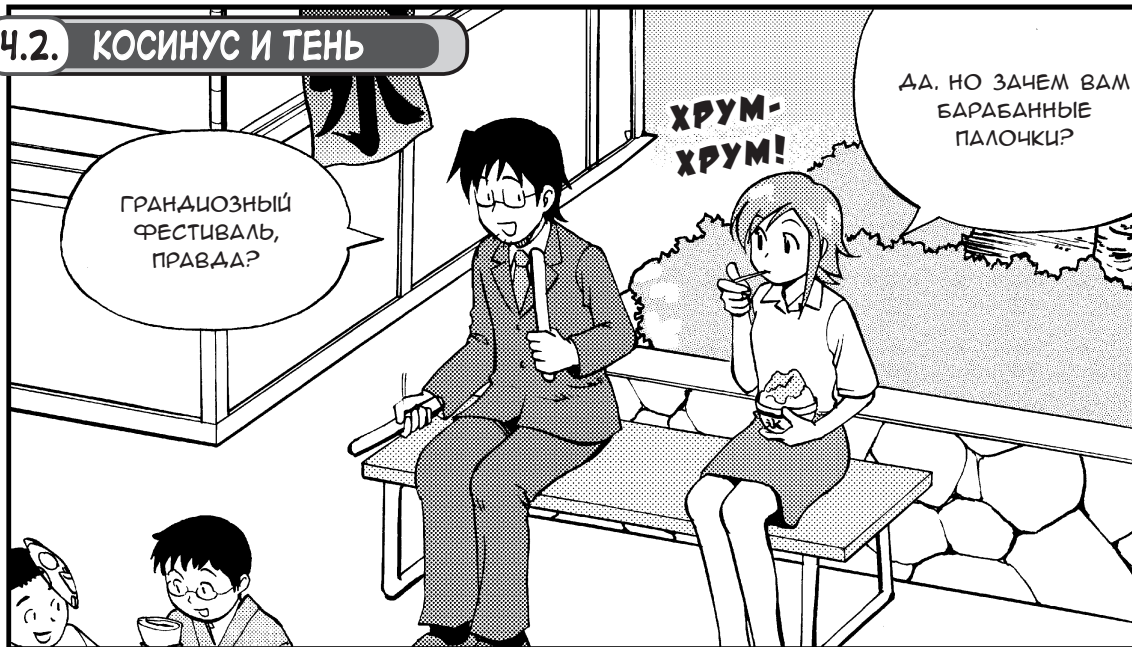
ЕЩЁ И СИНОСУС...

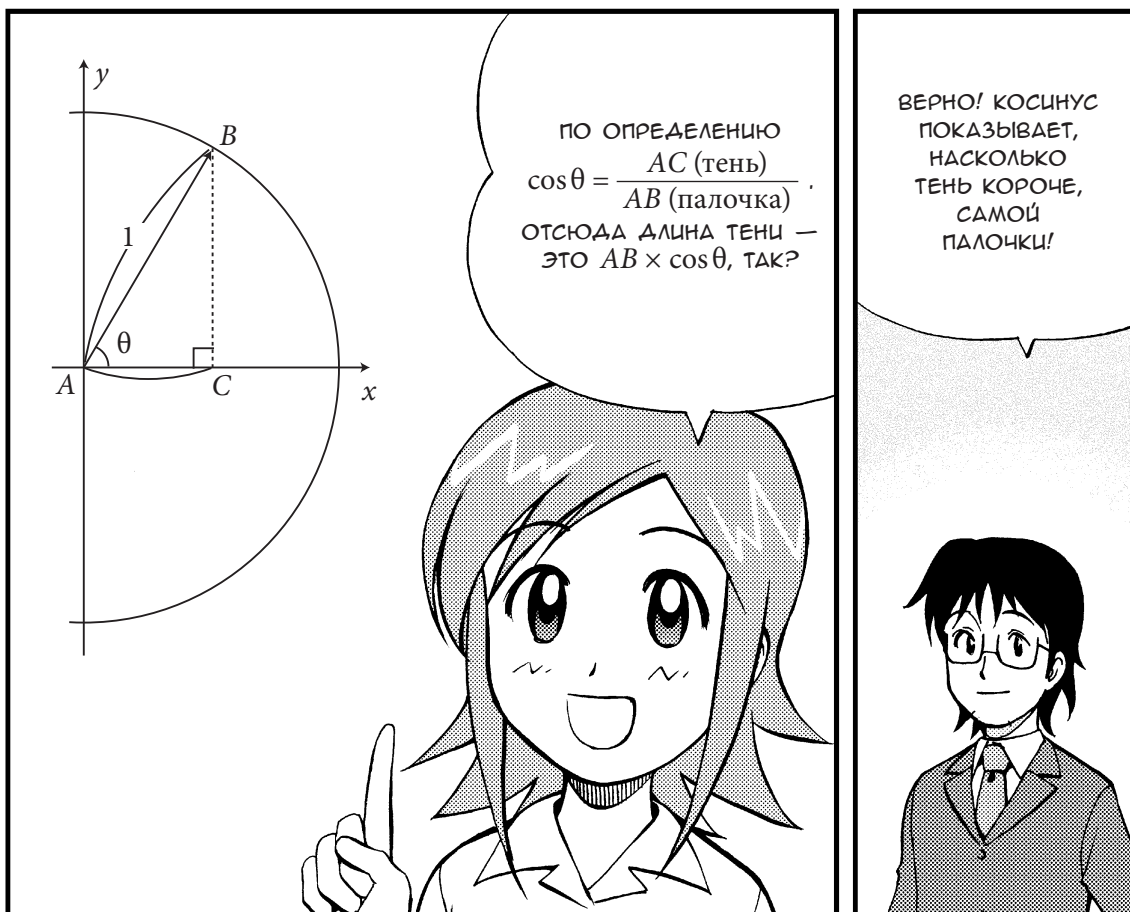
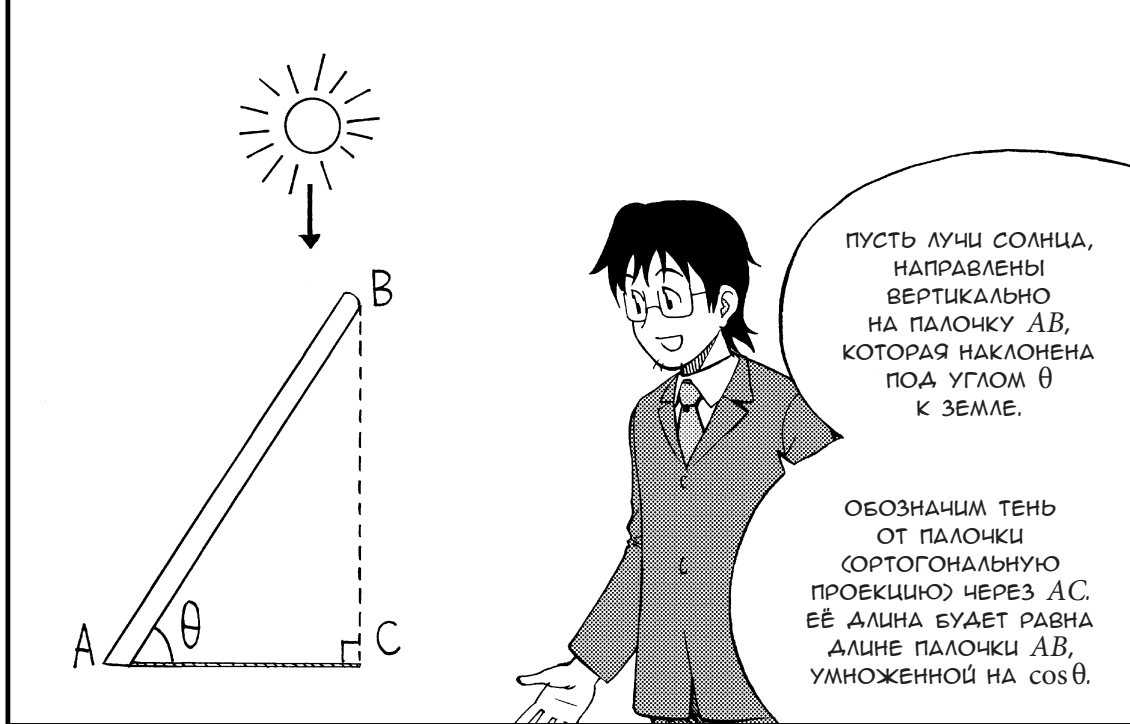
СМОТРИ, НОРИКО!!

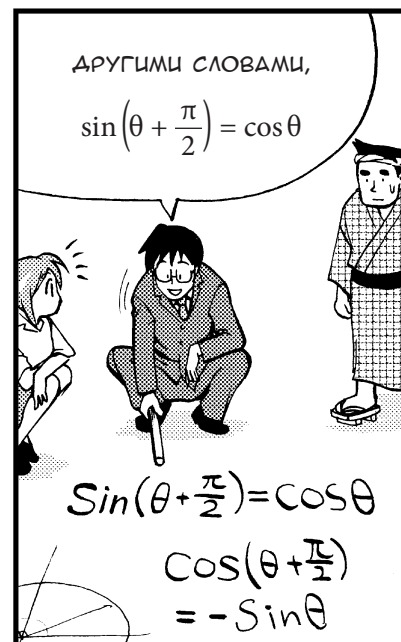
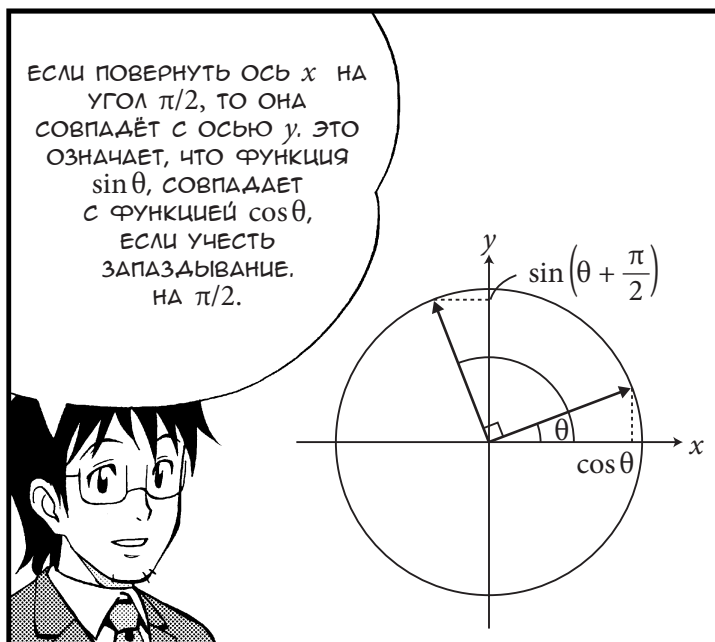
ДЁРР!!



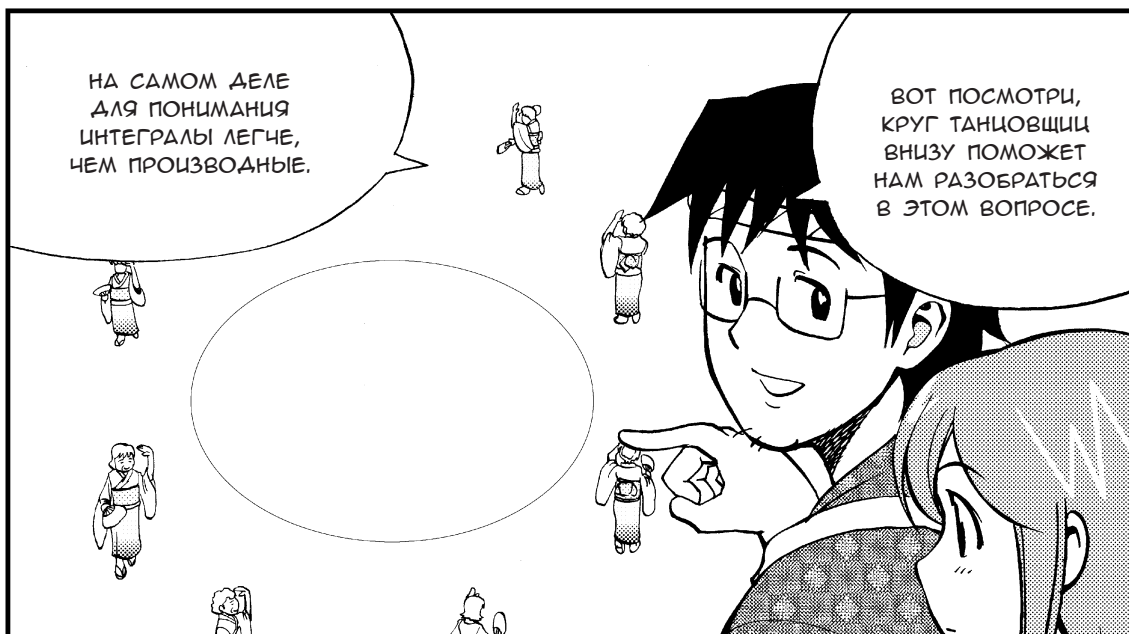
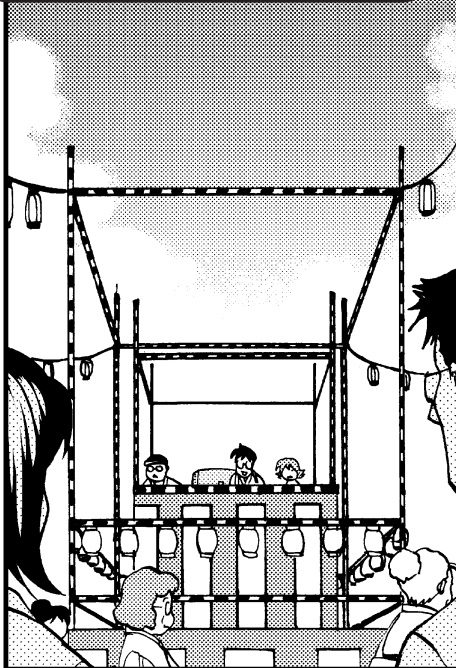
4.2. КОСИНУС И ТЕНЬ

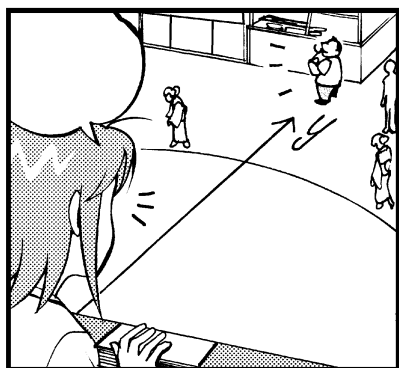
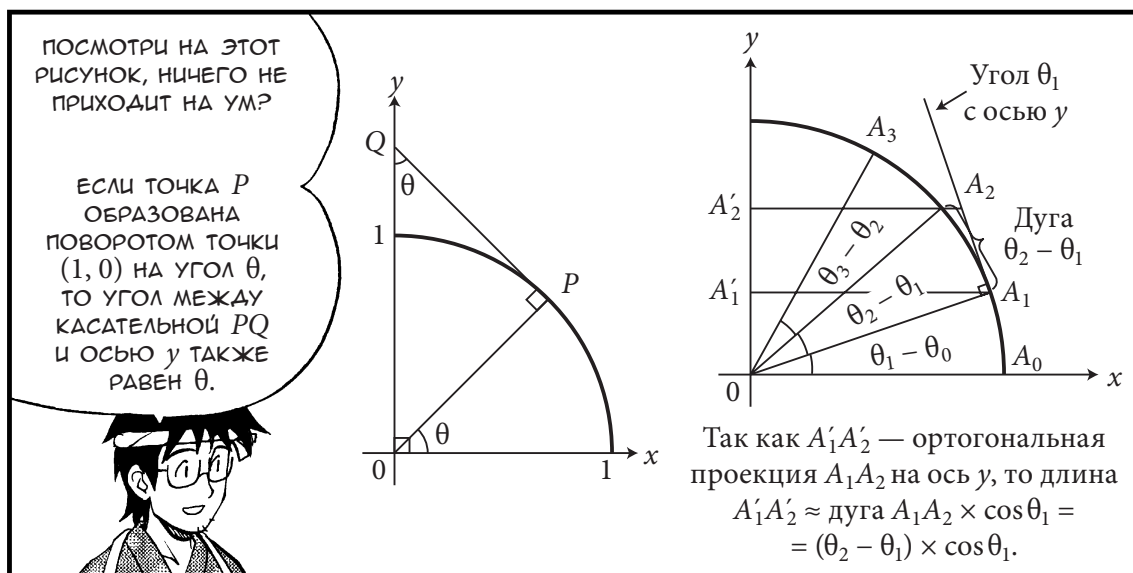
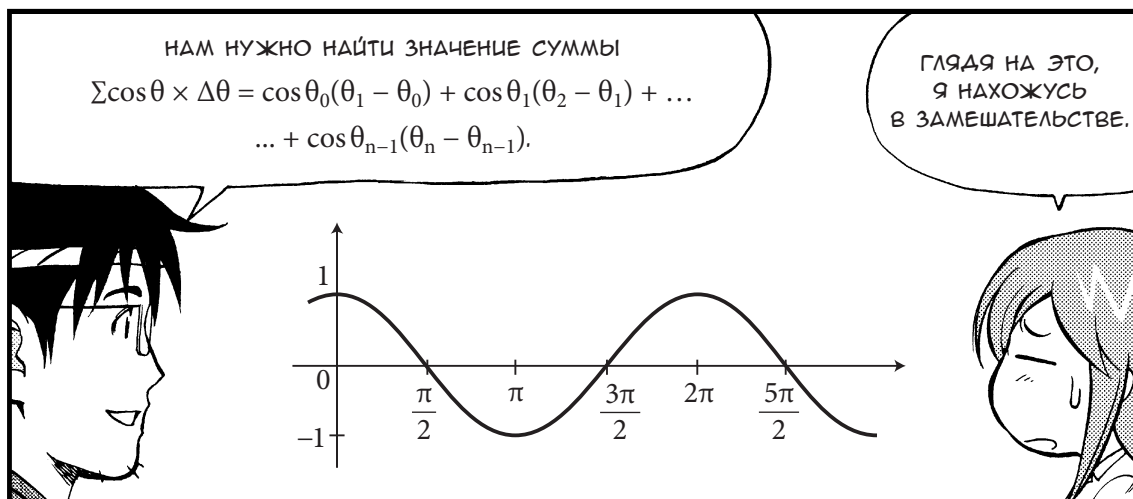


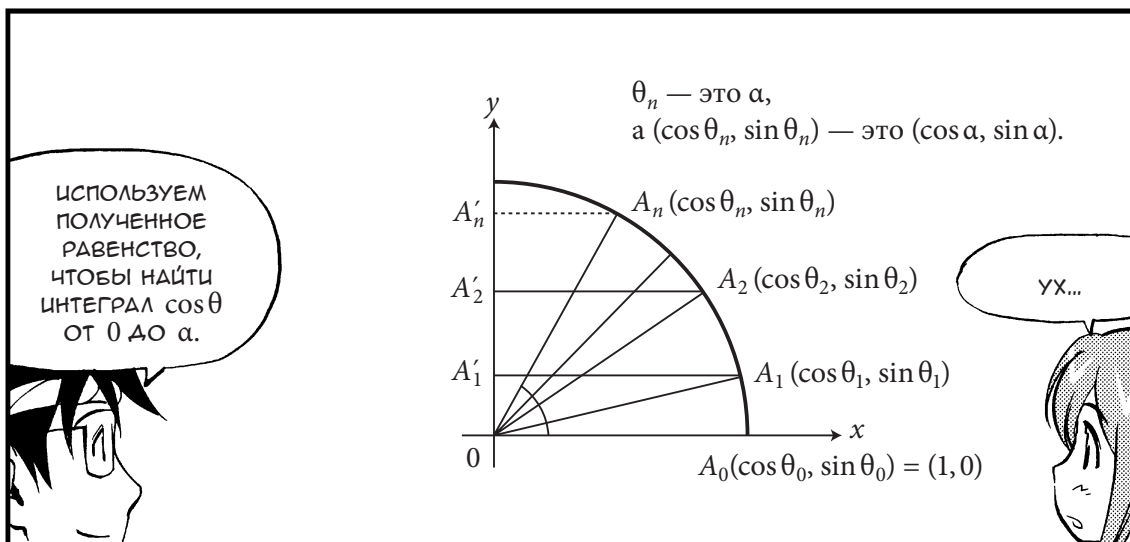




4.3. ИНТЕГРИРОВАНИЕ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ







Интеграл косинуса угла θ от 0 до α равен сумме $\cos \theta \times \Delta \theta$ при изменении θ от 0 до α :
 $\cos \theta_0(\theta_1 - \theta_0) + \cos \theta_1(\theta_2 - \theta_1) + \dots + \cos \theta_{n-1}(\theta_n - \theta_{n-1}) \approx$
 $\approx A'_0 A'_1 + A'_1 A'_2 + \dots + A'_{n-1} A'_n = A'_0 A'_n =$
 $= \sin \alpha.$

ЭТО ВЕРНО?

ВЕРНО! ЕСЛИ УМЕНЬШАТЬ $\Delta \theta$ БЕСКОНЕЧНО, ТО ЕСТЬ $\Delta \theta \rightarrow 0 \dots$

...ТО МЫ НАЙДЕМ, ЧТО ИНТЕГРАЛ КОСИНУСА РАВЕН СИНУСУ!

$\int_0^\alpha \cos \theta d\theta = \sin \alpha - \sin 0$

НО ТОГДА ВЕРНО И ОБРАТНОЕ УТВЕРЖДЕНИЕ, ЧТО ПРОИЗВОДНАЯ СИНУСА — ЭТО КОСИНУС?

ТЫ ПРАВА!

ЗАПОМНИ, ПОЖАЛУЙСТА, ЭТИ ФОРМУЛЫ.

Дифференцирование и интегрирование тригонометрических функций

$$\int_0^{\alpha} \cos \theta \, d\theta = \sin \alpha - \sin 0. \quad (4.1)$$

Из формулы (4.1) следует, что

$$(\sin \theta)' = \cos \theta. \quad (4.2)$$

Заменяя в формуле (4.2) θ на $\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right)$, получаем $\left(\sin\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right)\right)' = \cos\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right)$, откуда, согласно тождеству на стр. 122, следует формула

$$(\cos \theta)' = -\sin \theta. \quad (4.3)$$



БИВИИ

**Танец
интегрирования**
Тригонометрическая
версия



Поднимаем обе руки
прямо перед собой

БУНБУН



Подпрыгиваем и
разворачиваемся влево

**БИВИИ-
ГА-БУН**

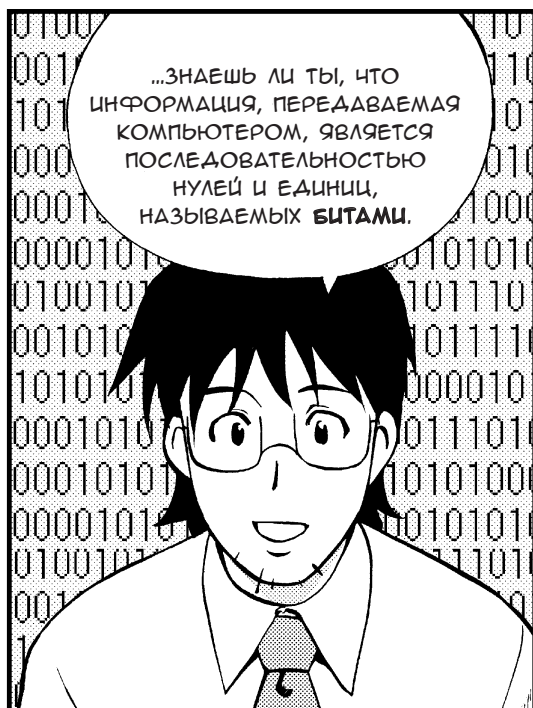


Подпрыгиваем ещё раз и
дважды хлопаем в ладоши





4.4. ПОКАЗАТЕЛЬНАЯ И ЛОГАРИФМИЧЕСКАЯ ФУНКЦИИ



* Игра слов: «бит» имеет также значение «немного».

КОМПЬЮТЕРЫ
ОБРАБАТЫВАЮТ
ИНФОРМАЦИЮ В БИНАРНОЙ
СИСТЕМЕ.

С ПОМОЩЬЮ ОДНОГО БИТА
МОЖНО ПРЕДСТАВИТЬ ДВА
ЧИСЛА (0 и 1), С ПОМОЩЬЮ
ДВУХ БИТОВ — ЧЕТЫРЕ
(00, 01, 10, 11), С ПОМОЩЬЮ
ТРЕХ — ВОСЕМЬ, И Т. Д.
ТАКИМ ОБРАЗОМ, n БИТАМ
СООТВЕТСТВУЮТ 2^n
ВОЗМОЖНЫХ ЧИСЕЛ.

ЕСЛИ МЫ ПРЕДСТАВИМ
В ВИДЕ ФУНКЦИИ ЧИСЛО
ЗНАЧЕНИЙ, КОТОРЫЕ
МОГУТ БЫТЬ ВЫРАЖЕНЫ
 x БИТАМИ, ТО ПОЛУЧИМ
ПОКАЗАТЕЛЬНУЮ
ФУНКЦИЮ $f(x) = 2^x$.

**Показательная
функция**

ПОКАЗАТЕЛЬНАЯ
ФУНКЦИЯ?
ЧТО ОНА
ПОКАЗЫВАЕТ?

ПОКАЗАТЕЛЬНАЯ
ФУНКЦИЯ ЧАСТО
ИСПОЛЬЗУЕТСЯ ДЛЯ
ВЫРАЖЕНИЯ
КАКОГО-НИБУДЬ
РОСТА, НАПРИМЕР,
ЭКОНОМИЧЕСКОГО.

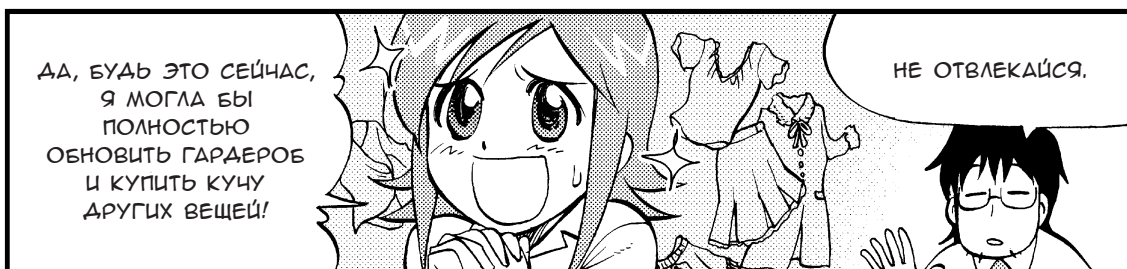
ДАЙ
ПОДУМАТЬ...
К ПРИМЕРУ...

ХМ-М...

...В 1950-Х ГОДАХ
В ЯПОНИИ НАБЛЮДАЛСЯ
ВЫСОКИЙ ЭКОНОМИЧЕС-
КИЙ РОСТ — ОКОЛО
10 ПРОЦЕНТОВ
В ГОД.

ЖИТЕЛЬ ЯПОНИИ
С ГОДОВЫМ ДОХОДОМ
В 5 МИЛЛИОНОВ ЙЕН
ЗАРАБАТЫВАЛ
В СЛЕДУЮЩЕМ ГОДУ
5.5 МИЛЛИОНОВ.

ЕГО ЗАРПЛАТА ВОЗРАСТАЛА
НА 10 ПРОЦЕНТОВ,
И БЛАГОДАРЯ ЭТОМУ
ОН МОГ ИМЕТЬ БОЛЬШЕ
ТОВАРОВ И УСЛУГ, ЧЕМ
В ПРЕДЫДУЩЕМ ГОДУ.



Валовой продукт через 1 год —

$$G_1 = G_0 \times 1,1.$$

Валовой продукт через 2 года —

$$G_2 = G_1 \times 1,1 = G_0 \times 1,21.$$

Валовой продукт через 3 года —

$$G_3 = G_0 \times 1,33$$

Валовой продукт через 4 года —

$$G_4 = G_0 \times 1,46.$$

Валовой продукт через 5 лет —

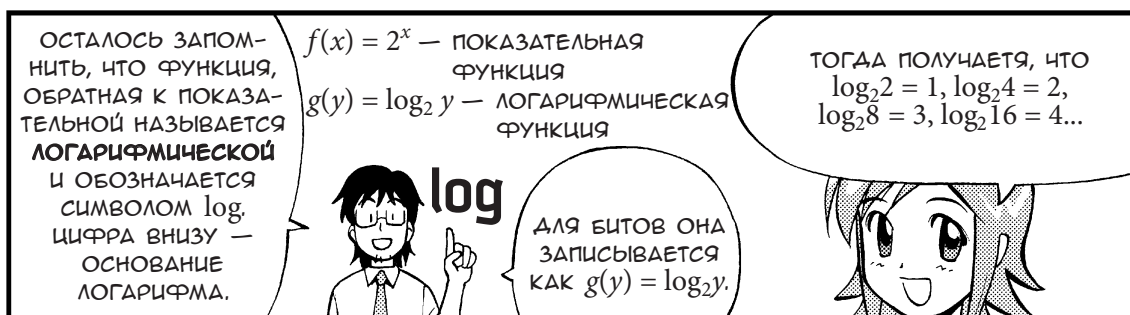
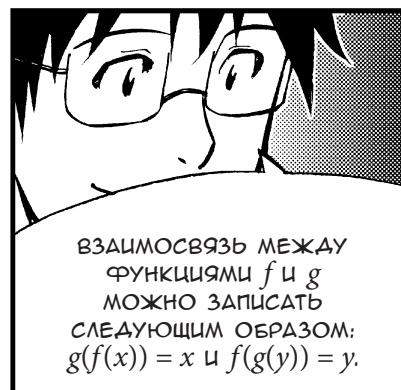
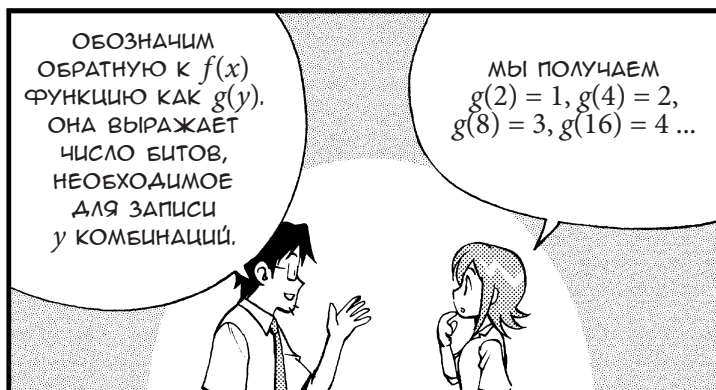
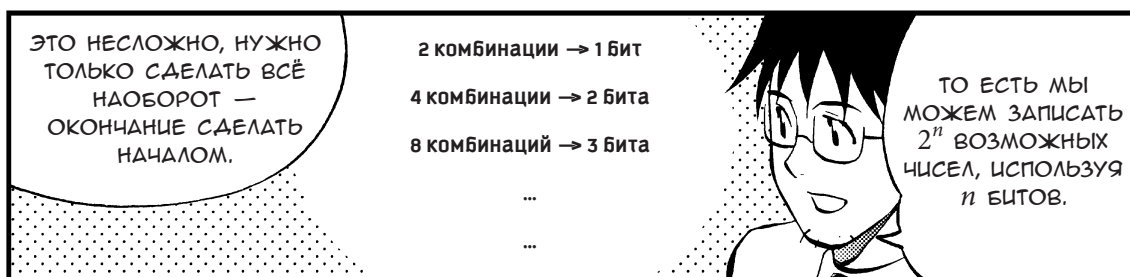
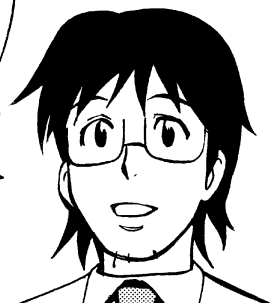
$$G_5 = G_0 \times 1,61.$$





ДЛЯ БИТОВ ТОЖЕ ИСПОЛЬЗУЕТСЯ ПОКАЗАТЕЛЬНАЯ ФУНКЦИЯ $f(x) = 2^x$, ВЫРАЖАЮЩАЯ КОЛИЧЕСТВО ВОЗМОЖНЫХ ЧИСЕЛ, СООТВЕТСТВУЮЩЕЕ x БИТАМ. СУЩЕСТВУЕТ ТАКЖЕ ТАК НАЗЫВАЕМАЯ **ОБРАТНАЯ** ФУНКЦИЯ, КОТОРАЯ ВЫРАЖАЕТ ЧИСЛО БИТОВ, НЕОБХОДИМОЕ ДЛЯ ЗАДАННОГО ЧИСЛА КОМБИНАЦИЙ.

Обратная функция



4.5. ОБОБЩЕНИЕ ПОКАЗАТЕЛЬНОЙ И ЛОГАРИФМИЧЕСКОЙ ФУНКЦИЙ



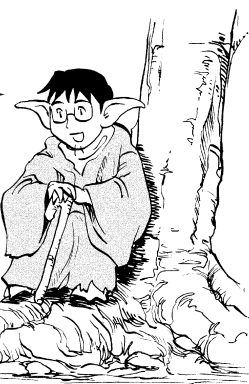
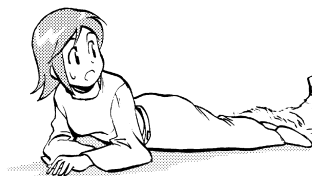
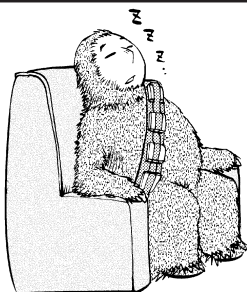
НЕСМОТЯ НА УДОБСТВО ПОКАЗАТЕЛЬНОЙ И ЛОГАРИФМИЧЕСКОЙ ФУНКЦИЙ, МЫ ПОКА РАССМОТРЕЛИ ФУНКЦИЮ $f(x) = 2^x$ ТОЛЬКО ДЛЯ x , ЯВЛЯЮЩИХСЯ НАТУРАЛЬНЫМИ ЧИСЛАМИ, И ФУНКЦИЮ $g(y) = \log_2 y$ ДЛЯ y , РАВНЫХ 2^N , ГДЕ N — ТАКЖЕ НАТУРАЛЬНЫЕ ЧИСЛА. НО КАК НАЙТИ ЗНАЧЕНИЯ ДЛЯ ПОКАЗАТЕЛЯ СТЕПЕНИ -8 , $7/3$ ИЛИ $\sqrt{2}$, $\log_2 5$, $\log_2 \pi$?

ХМ, И КАК ЖЕ?



Я ПОПЫТАЮСЬ НА ПРИМЕРАХ ПОКАЗАТЬ, КАК НАЙТИ ЗНАЧЕНИЯ ЭТИХ ФУНКЦИЙ В ОБЩЕМ СЛУЧАЕ.

РАД, ЧТО МЕНЯ СПРОСИЛА ТЫ. СИЛУ ИСЧИСЛЕНИЯ ИСПОЛЬЗУЕМ МЫ!



ДЛЯ НАЧАЛА ВОЗЬМЁМ ПРИМЕР, РАССМОТРЕННЫЙ РАНЕЕ, ТОЛЬКО БУДЕМ ИСКАТЬ НЕ ГОДОВОЙ, А МГНОВЕННЫЙ ТЕМП РОСТА.

Годовой темп роста =

$$= \frac{\text{Значение через год} - \text{Текущее значение}}{\text{Текущее значение}} = \frac{f(x+1) - f(x)}{f(x)}.$$



С ЭТОГО ВЫРАЖЕНИЯ МЫ НАЧИНАЛИ.



ПРЕОБРАЗУЕМ ЕГО В ВЫРАЖЕНИЕ
ДЛЯ МГНОВЕННОГО ТЕМПА РОСТА.

Мгновенный темп роста =

$$= \text{Предел} \left(\frac{\text{Значение чуть позднее} - \text{Исходное значение}}{\text{Исходное значение}} \times \frac{1}{\text{Приращение времени}} \right) =$$

$$= \frac{f(x + \varepsilon) - f(x)}{f(x)} \frac{1}{\varepsilon} \text{ при } \varepsilon \rightarrow 0 = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(\frac{1}{f(x)} \frac{f(x + \varepsilon) - f(x)}{\varepsilon} \right) = \frac{1}{f(x)} f'(x).$$



ТАКИМ ОБРАЗОМ, МГНОВЕННЫЙ
ТЕМП РОСТА ОПРЕДЕЛЯЕТСЯ КАК

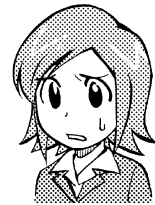
$$\frac{f'(x)}{f(x)}.$$

Найдём функцию $f(x)$, которой соответствует постоянное значение мгновенного темпа роста:

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = c = \text{const.}$$

Если положить $c = 1$, то $f(x)$ должна удовлетворять условию $\frac{f'(x)}{f(x)} = 1$.

НО КАК НАЙТИ ТАКУЮ ФУНКЦИЮ $f(x)$?



1 Предположим, что это показательная функция.

из условия $f'(x) = f(x)$ следует, что
 $f'(0) = f(0)$.

(1)

вспомним, что в окрестности точки $h = 0$
мы можем записать $f(h) \approx f(0) + f'(0)(h - 0)$.



Используя равенство (1), получаем

$$f(h) \approx f(0) + f'(0)h = f(0)(1 + h). \quad (2)$$

Теперь запишем приближенную формулу, если x достаточно близко к h :

$$f(x) \approx f(h) + f'(h)(x - h).$$

Заменим x на $2h$ и, используя условие $f'(h) = f(h)$, получим

$$f(2h) \approx f(h) + f(h)h = f(h)(1 + h).$$

Подставляя в это уравнение вместо $f(h)$ его приближённое значение из (2), получаем:

$$f(2h) \approx f(0)(1 + h)(1 + h),$$

$$f(2h) \approx f(0)(1 + h)^2.$$

Аналогичным образом можно получить выражения для $x = 3h, 4h, 5h, \dots$

В общем случае для mh будет справедливо выражение:

$$f(mh) \approx f(0)(1 + h)^m.$$

Если ввести условие $mh = 1$, то получим:

$$f(1) = f(mh) \approx f(0)(1 + h)^m.$$

Действуя таким же образом, получим:

$$f(2) = f(2mh) \approx f(0)(1 + h)^{2m} = f(0)\{(1 + h)^m\}^2;$$

$$f(3) = f(3mh) \approx f(0)(1 + h)^{3m} = f(0)\{(1 + h)^m\}^3.$$

Для произвольного натурального числа n будем иметь:

$$f(n) \approx f(0) \times a^n, \text{ где } a = (1 + h)^m.$$

Полученное выражение является показательной функцией¹⁾!

¹⁾ Так как $mh = 1$, то $h = 1/m$. Тогда $f(1) \approx f(0) (1 + 1/m)^m$. Если устремить m к бесконечности, то выражение $(1 + 1/m)^m$ будет стремиться к e — числу Эйлера, равному примерно 2.718. В результате получаем, что $f(1) = f(0) \times e$, что соответствует рассуждениям, которые будут приведены на стр. 139.

2 Теперь покажем, что функция $f(x)$ существует, и найдём её вид.

ВЫРАЗИМ ОБРАТНУЮ ФУНКЦИЮ
 $y = f(x)$ КАК $x = g(y)$.



ИЗ УСЛОВИЯ $f'(x) = f(x)$ СЛЕДУЕТ, ЧТО ПРОИЗВОДНАЯ
ОТ $f(x)$ РАВНА САМОЙ ФУНКЦИИ. ИСПОЛЬЗУЕМ ЭТО,
ЧТОБЫ НАЙТИ ПРОИЗВОДНУЮ ФУНКЦИИ $g(y)$!

$$g'(y) = \frac{1}{f'(x)}.$$

(4.6) ← Эту формулу мы получили раньше*.

$$g'(y) = \frac{1}{f'(x)} = \frac{1}{f(x)} = \frac{1}{y}.$$

Теперь применим основную
теорему интегрирования:

$$\int_1^{\alpha} \frac{1}{y} dy = g(\alpha) - g(1)$$

Если принять $g(1) = 0 \dots$

(4.7) ← Условие $f'(x) = f(x)$ однозначно
определяет вид производной об-
ратной функции.

(4.8) ← Чтобы найти значение функции
 $g(\alpha)$, нам надо проинтегрировать её
производную $g'(y) = \frac{1}{y}$ на отрезке
от 1 до α .

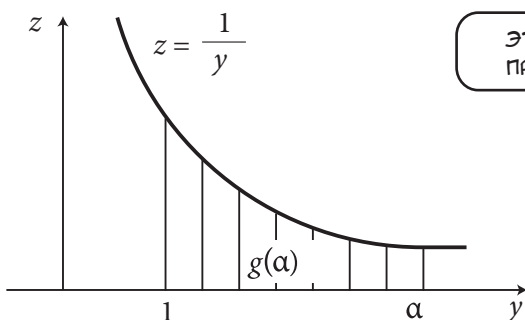


ПОЛУЧАЕМ $g(\alpha) = \int_1^{\alpha} \frac{1}{y} dy.$

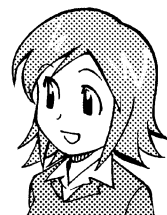
ОТЛИЧНО! ТЕПЕРЬ НАРИСУЕМ ГРАФИК ФУНКЦИИ $z = \frac{1}{y}$!



*Как было показано на стр. 75, если функция $x = g(y)$ является обратной к $y = f(x)$, то $f'(x)g'(y) = 1$.

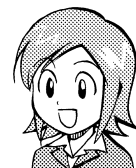


ЭТО ГРАФИК ОБРАТНОЙ
ПРОПОРЦИОНАЛЬНОСТИ.



ФУНКЦИЯ $g(\alpha)$ ПРЕДСТАВЛЯЕТ СОБОЙ ПЛОЩАДЬ ФИГУРЫ ПОД КРИВОЙ НА ОТРЕЗКЕ ОТ 1 ДО α . ПРИ ЭТОМ ПОЛУЧАЕМ ОДНОЗНАЧНО ОПРЕДЕЛЯЕМУЮ ФУНКЦИЮ. ДРУГИМИ СЛОВАМИ, $g(\alpha)$ СТРОГО ОПРЕДЕЛЕНА ДЛЯ ЛЮБОГО ЗНАЧЕНИЯ α , ВКЛЮЧАЯ ДРОБИ И ИРРАЦИОНАЛЬНЫЕ ЧИСЛА, НАПРИМЕР $\sqrt{2}$.

ФУНКЦИЯ $z = \frac{1}{y}$ ЯВЛЯЕТСЯ ЯВНО ЗАДАННОЙ ФУНКЦИЕЙ,
ПОЭТОМУ ПЛОЩАДЬ ПОД НЕЙ МОЖЕТ БЫТЬ НАЙДЕНА ТОЧНО.



Так как $g(1) = \int_1^1 \frac{1}{y} dy = 0$, то $\int_1^\alpha \frac{1}{y} dy = g(\alpha) - g(1)$, что соответствует формуле (5).

Итак, мы нашли обратную функцию $g(y)$ через площадь под кривой, используя для этого искомую функцию $f(x)$.



4.6. СВОЙСТВА ПОКАЗАТЕЛЬНОЙ И ЛОГАРИФМИЧЕСКОЙ ФУНКЦИЙ

1 Рассмотрим функцию темпа роста, имеющую вид $\frac{f'(x)}{f(x)}$.

2 Надо найти функцию $y = f(x)$, удовлетворяющую условию $\frac{f'(x)}{f(x)} = 1$, то есть имеющую постоянный темп роста, равный 1.

Указанному условию удовлетворяет показательная функция, для которой

$$f'(x) = f(x).$$

3 Производная обратной по отношению к $y = f(x)$ функции $x = g(y)$ равна

$$g'(y) = \frac{1}{y}. \quad (*)$$

4 Значения функции $g(\alpha)$ равны площади под графиком функции $h(y) = \frac{1}{y}$:

$$g(\alpha) = \int_1^\alpha \frac{1}{y} dy.$$

Обратная функция к $f(x)$ — это функция, удовлетворяющая условию (*) и для которой $g(1) = 0$.

5 Так как $f(x)$ — показательная функция, то, используя константу a_0 , можно записать:

$$f(x) = a_0 a^x.$$

Так как по определению обратной функции $f(g(1)) = 1$, и в тоже время из условия $g(1) = 0$ следует, что $f(g(1)) = f(0) = a_0 a^0 = a_0$, получаем

$$f(g(1)) = 1 = a_0.$$

Отсюда следует, что

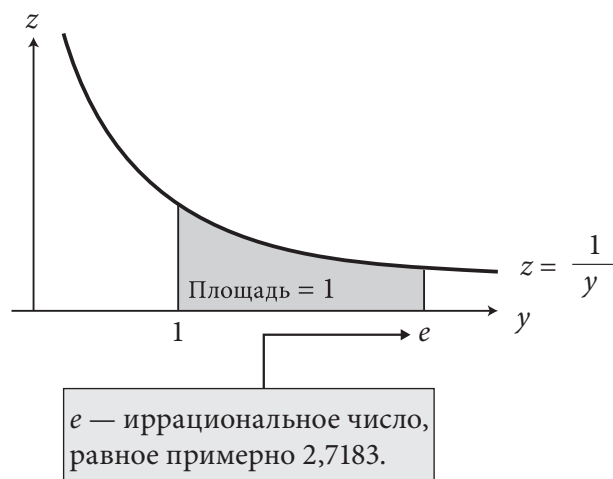
$$f(x) = a^x.$$

Рассуждая подобным образом, находим:

$$f(g(e)) = f(1) = a^1 \text{ и } f(g(e)) = e, \text{ а значит}$$

$$e = a^1, \text{ и в конечном итоге имеем}$$

$$f(x) = e^x.$$



Значение основания натурального логарифма e находится как число y , удовлетворяющее условию $g(y) = 1$. Другими словами, это число α , для которого площадь между кривой $1/y$ и осью y на отрезке от 1 до α равна единице.

Обратная к ней функция $g(y)$ называется *натуральным логарифмом* и обозначается $\ln y = \log_e y$.

Перепишем шаги **2** ... **4**, используя показательную функцию e^x и логарифмическую функцию $\ln y$.

6 $f'(x) = f(x) \Leftrightarrow (e^x)' = e^x.$

7 $g'(y) = \frac{1}{y} \Leftrightarrow (\ln y)' = \frac{1}{y}.$

8 $g(\alpha) = \int_1^\alpha \frac{1}{y} dy \Leftrightarrow \ln y = \int_1^y \frac{1}{y} dy.$

9 Определим функцию 2^x для любого вещественного числа x . Для этого запишем её в виде

$$f(x) = e^{(\ln 2)x},$$

где x — любое вещественное число.

Записанное выше выражение следует из того, что e^x и $\ln y$ — взаимно обратные функции, для которых можно записать:

$$e^{\ln 2} = 2.$$

В результате для любого натурального числа x имеем

$$f(x) = (e^{\ln 2})^x = 2^x.$$

4.7. ДРУГИЕ ПРИМЕНЕНИЯ ОСНОВНЫХ ТЕОРЕМ

Дифференцирование степенной функции

Степенная функция $f(x) = x^a$ с отрицательным показателем степени может использоваться для записи таких функций, как

$$y = \frac{1}{x} = x^{-1}, y = \frac{1}{x^2} = x^{-2}, y = \frac{1}{x^3} = x^{-3}, \dots$$

Для этих функций также справедлива найденная ранее формула.

Дифференцирование степенной функции

$$f(x) = x^a, \quad f'(x) = ax^{a-1}. \quad (4.4)$$

Примеры:

Если $f(x) = \frac{1}{x^3}$, то $f'(x) = (x^{-3})' = -3x^{-4} = -\frac{3}{x^4}$.

Если $f(x) = \sqrt[4]{x}$, то $f'(x) = (x^{1/4})' = \frac{1}{4} x^{-3/4} = \frac{1}{4\sqrt[4]{x^3}}$.

Доказательство:

Выразим функцию $f(x) = x^a$ через число e , используя равенство $e^{\ln x} = x$:

$$f(x) = x^a = (e^{\ln x})^a = e^{a \ln x}.$$

Из полученного равенства следует, что

$$\ln f(x) = a \ln x.$$

Возьмём производные от левой и правой частей этого уравнения, учитывая, что производная $\ln w = \frac{1}{w}$, и, применяя цепное правило дифференцирования сложной функции, получим:

$$\frac{1}{f(x)} \times f'(x) = a \times \frac{1}{x}.$$

После несложных преобразований получаем

$$f'(x) = a \times \frac{1}{x} \times f(x) = a \times \frac{1}{x} \times x^a = ax^{a-1}.$$

Интегрирование по частям

Из правила дифференцирования произведения двух функций следует, что если $h(x) = f(x)g(x)$, то:

$$h'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x).$$

Таким образом, произведение $f(x)g(x)$ является первообразной для функции $f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$. Применяя основную теорему интегрирования, получаем

$$\int_a^b \{f'(x)g(x) + f(x)g'(x)\} dx = f(b)g(b) - f(a)g(a).$$

Используя правило интегрирования суммы, получаем следующую формулу:

Интегрирование по частям

$$\int_a^b f'(x)g(x) dx + \int_a^b f(x)g'(x) dx = f(b)g(b) - f(a)g(a) \quad (4.5)$$

В качестве примера вычислим интеграл

$$\int_0^\pi x \sin x \, dx.$$

Так как синус является производной от косинуса, выберем в качестве $f(x) = x$, а в качестве $g(x) = \cos x$. Тогда

$$\int_0^\pi x' \cos x \, dx + \int_0^\pi x (\cos x)' \, dx = f(x)g(x) \Big|_0^\pi = f(\pi)g(\pi) - f(0)g(0).$$

Подставляя выбранные нами функции вместо $f(x)$ и $g(x)$, получаем

$$\pi \cos \pi - 0 \cos 0 = \pi(-1) - 0 = -\pi.$$

После преобразований получаем

$$\begin{aligned} \int_0^\pi x' \cos x \, dx + \int_0^\pi x (\cos x)' \, dx &= \int_0^\pi \cos x \, dx + \int_0^\pi x (-\sin x) \, dx = \\ &= \int_0^\pi \cos x \, dx - \int_0^\pi x \sin x \, dx = -\pi. \end{aligned}$$

Перепишем эту формулу относительно искомого интеграла:

$$\int_0^\pi x \sin x \, dx = \int_0^\pi \cos x \, dx + \pi = \sin x \Big|_0^\pi + \pi = \sin \pi - \sin 0 + \pi = \pi.$$

4.8. УПРАЖНЕНИЯ К ГЛАВЕ 4

1. Найти производную $\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x}$.

2. Вычислить

$$\int_0^{\pi/4} \frac{1}{\cos^2 x} dx.$$

3. Найти значение x , при котором достигается минимум функции $f(x) = xe^x$.

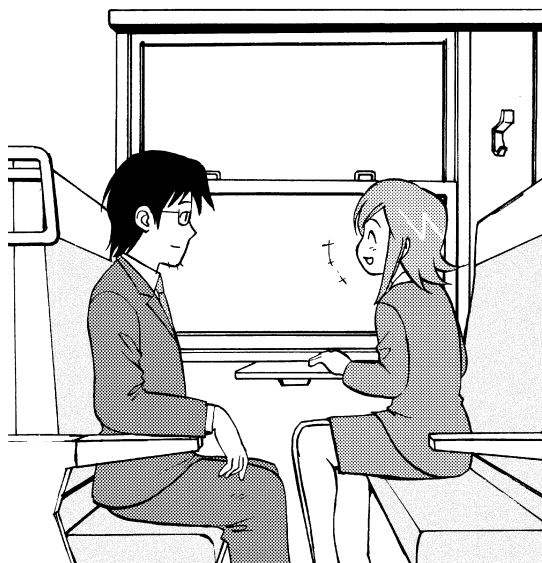
4. Вычислить

$$\int_1^e 2x \ln x \, dx.$$

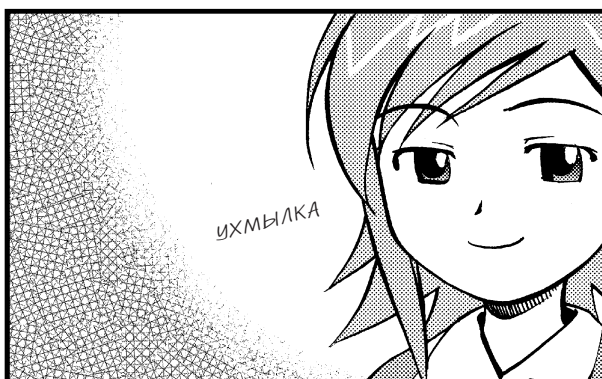
Указание: возьмите функции $f(x) = x^2$, $g(x) = \ln x$, и воспользуйтесь интегрированием по частям.

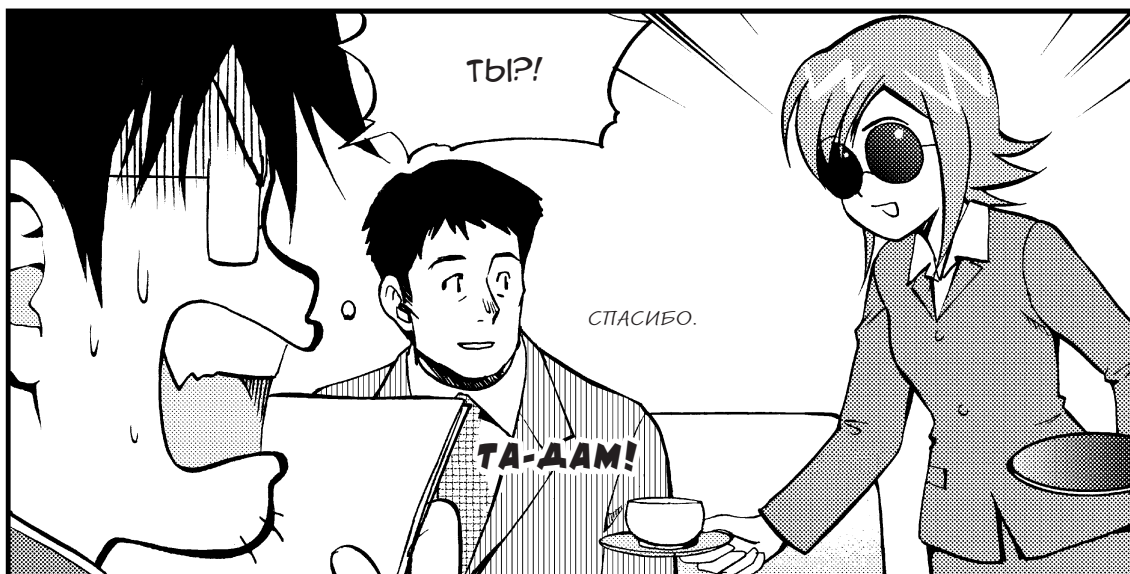
5

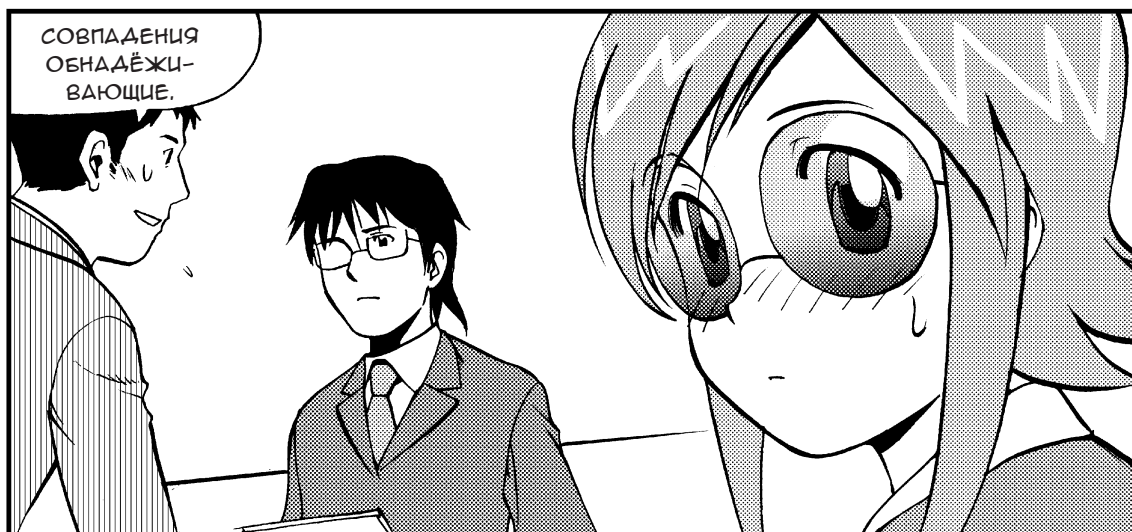
ИЗУЧАЕМ РАЗЛОЖЕНИЕ В РЯД ТЕЙЛОРА!

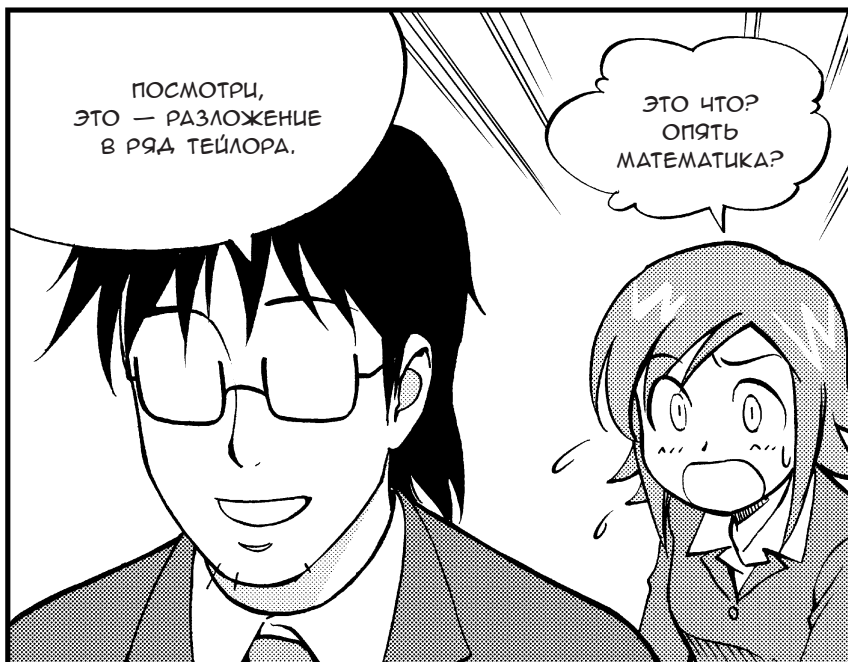
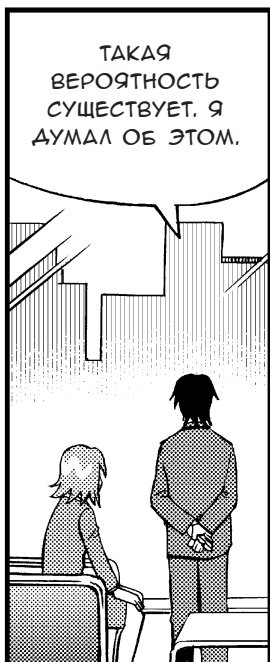
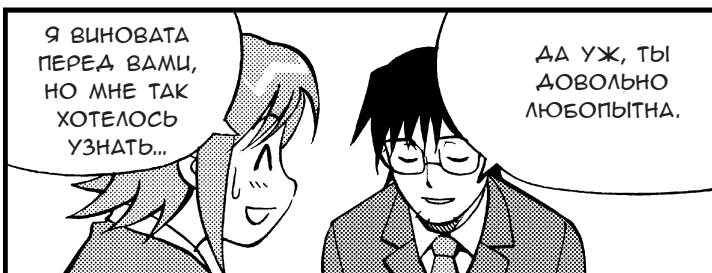


5.1. АСАГАКЭ ТАЙМС. ГЛАВНЫЙ ОФИС







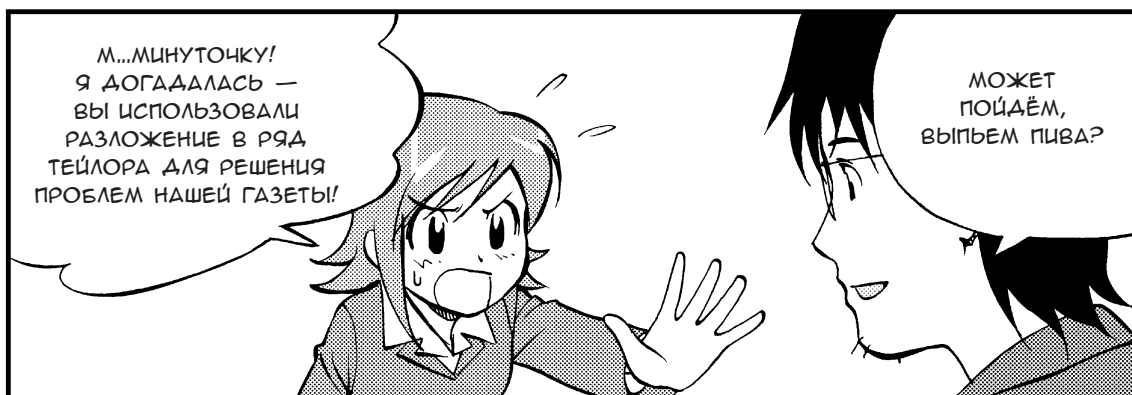
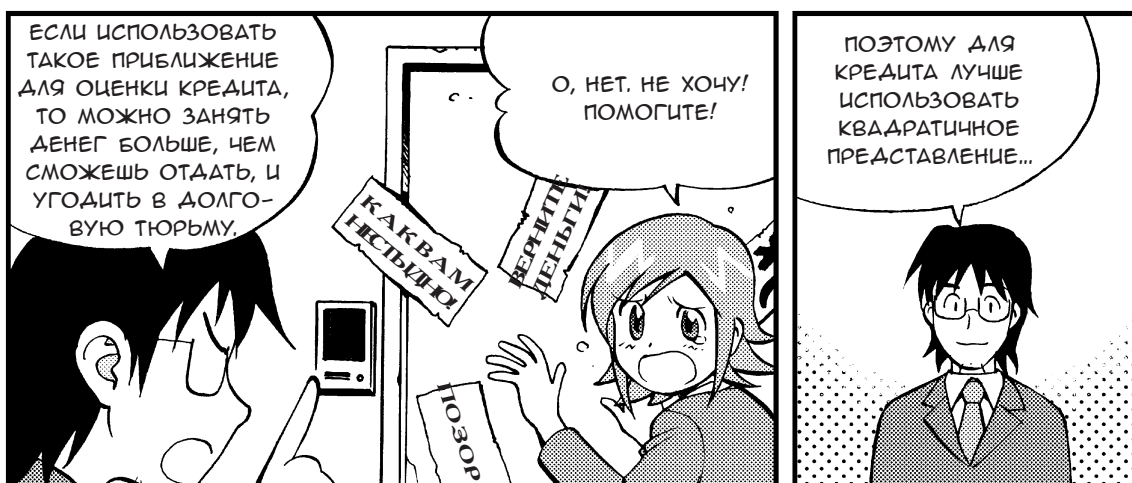
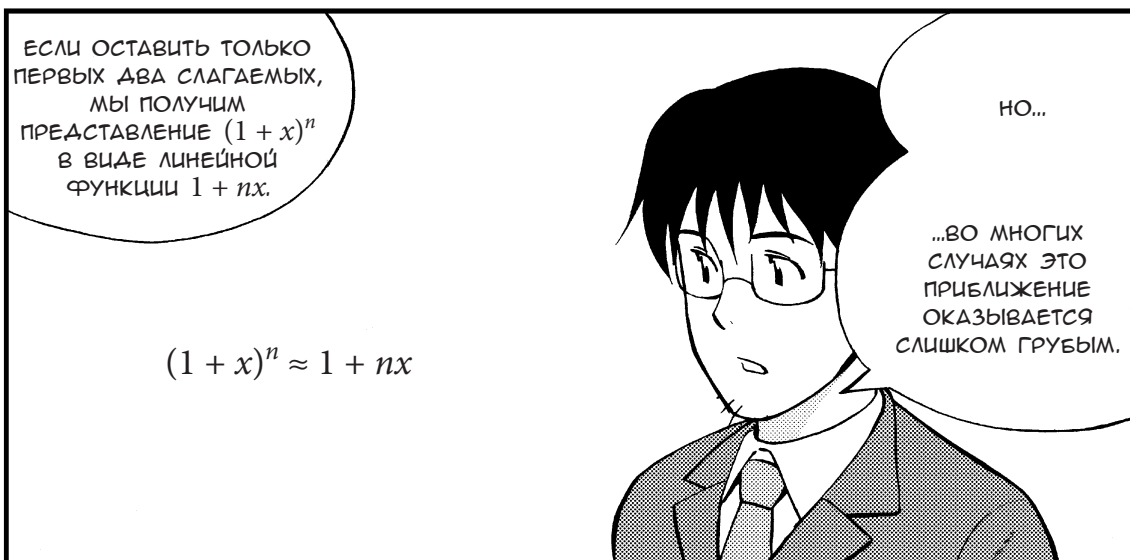




$$(1+x)^n = 1 + {}_nC_1x + {}_nC_2x^2 + {}_nC_3x^3 + \dots + {}_nC_nx^n.$$

Это формула биномиального разложения, в которой ${}_nC_r = \frac{n!}{r!(n-r)!}$:

$${}_nC_1 = n, {}_nC_2 = \frac{n(n-1)}{2}, {}_nC_3 = \frac{n(n-1)(n-2)}{6}, \dots, {}_nC_r = \frac{n(n-1)\dots\{n-(r-1)\}}{r!}.$$



Формула квадратичного приближения

$$(1+x)^n \approx 1 + nx + \frac{n(n-1)}{2} x^2 \quad (5.1)$$

ЕСЛИ МЫ НЕМНОГО ИЗМЕНИМ ЭТУ
ФОРМУЛУ, ТО ПОЛУЧИМ ВЕСЬМА
ИНТЕРЕСНУЮ ЗАКОНОМЕРНОСТЬ.



Для любой пары n и x , удовлетворяющих условию $nx = 0,7$, получаем

$$\begin{aligned} (1+x)^n &\approx 1 + nx + \frac{n(n-1)}{2} x^2 \approx 1 + nx + \frac{1}{2} (nx)^2 - \frac{1}{2} nx^2 \approx \\ &\approx 1 + 0,7 + \frac{1}{2} \times 0,7^2 = 1,945 \approx 2. \end{aligned}$$

Пренебрегаем
в силу малости.

Таким образом, если $nx = 0,7$, то $(1+x)^n$ близко к 2. Из этого можно сформулировать следующий закон.

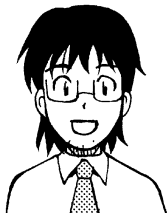
Закон долговой ямы

Если $\text{Срок погашения кредита} \times \text{Процентная ставка} = 0,7$,
то сумма долга увеличивается примерно вдвое, если

кредит взят
на 35 лет при 2%
на 7 лет при 10%
на 2 года при 35%



О, НЕТ!
ЭТО УЖАСНО!



Члены со степенью $n > 1$ называются членами высокой степени или порядка.

Представление функции в виде квадратичного приближения (второго порядка) часто позволяет обнаруживать интересные вещи. Рассмотрим теперь представление функции в виде многочлена более высокой степени. (На самом деле точное значение функции даётся многочленом бесконечной степени.)

Например, если мы разложим функцию

$$f(x) = \frac{1}{1-x}, \text{ то получим}$$

$$f(x) = \frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + \dots \text{ (и так до бесконечности)} \quad (1)$$

Обрати внимание, здесь используется знак $=$ вместо \approx !



НО ЭТО ВЕДЬ ОШЕЧКА? НЕ МОЖЕТ БЫТЬ РАВЕНСТВА!

Я ПРЕПОЛАГАЛ, ЧТО ТЫ ЭТО СКАЖЕШЬ. ДАВАЙ ПРОВЕРИМ.



Пусть $x = 0,1$, тогда получаем

$$f(0,1) = \frac{1}{1-0,1} = \frac{1}{0,9} = \frac{10}{9}.$$

Теперь попробуем рассчитать значение функции, представленной в виде многочлена,

$$\begin{aligned} f(0,1) &= 1 + 0,1 + 0,1^2 + 0,1^3 + 0,1^4 + \dots = \\ &= 1 + 0,1 + 0,01 + 0,001 + 0,0001 + \dots = \\ &= 1,111111\dots \end{aligned}$$

Если мы посчитаем $10/9$ делением в столбик, то получим тот же результат. \longrightarrow

$$\begin{array}{r} 10 \overline{) 9} \\ \underline{-9} \\ 10 \\ \underline{-9} \\ 10 \\ \underline{-9} \\ 10 \\ \underline{-9} \\ 10 \\ \underline{-9} \\ 10 \\ \dots \\ \dots \end{array}$$

Если произвольная функция $f(x)$ (дифференцируемая бесконечное число раз) может быть выражена в виде бесконечного ряда

$$f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \dots + a_nx^n + \dots,$$

то правую часть этой формулы называют разложением $f(x)$ в ряд Тейлора (в окрестности точки $x = 0$).



ЭТО ЗНАЧИТ, ЧТО $f(x)$ ПОЛНОСТЬЮ СОВПАДАЕТ С МНОГОЧЛЕНОМ БЕСКОНЕЧНОЙ СТЕПЕНИ В ОПРЕДЕЛЁННОМ ИНТЕРВАЛЕ, ВКЛЮЧАЮЩЕМ $x = 0$. НАДО ОТМЕТИТЬ, ЧТО ЗА ПРЕДЕЛАМИ ИНТЕРВАЛА ПРАВАЯ ЧАСТЬ МОЖЕТ НЕ СХОДИТЬСЯ К ОПРЕДЕЛЁННОМУ ЕДИНСТВЕННОМУ ЗНАЧЕНИЮ И ПОЭТОМУ ТЕРЯЕТ СМЫСЛ.

НАПРИМЕР, ПОДСТАВЛЯЯ $x = 2$ В ОБЕ ЧАСТИ ВЫРАЖЕНИЯ (1), ПОЛУЧАЕМ:

$$\text{Левая часть} = \frac{1}{1-2} = -1$$

$$\text{Правая часть} = 1 + 2 + 4 + 8 + 16 + \dots$$

Оказывается, выражение (1) верно только для x , находящихся в интервале $-1 < x < 1$, внутри которого и допускается разложение в ряд Тейлора. Этот интервал $-1 < x < 1$ называется *кругом сходимости*.

ВИДИШЬ? ЧАСТИ УРАВНЕНИЯ НЕ РАВНЫ.



5.2. КАК ПОЛУЧИТЬ РАЗЛОЖЕНИЕ В РЯД ТЕЙЛОРА

Пусть имеется разложение

$$f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \dots + a_nx^n + \dots \quad (2)$$

Найдём значение коэффициента a_n .

Подставляя $x = 0$ в формулу (2), получаем $f(0) = a_0$, откуда следует, что коэффициент 0-го порядка a_0 равен $f(0)$.

Возьмём производную от обеих частей формулы (2):

$$f'(x) = a_1 + 2a_2x + 3a_3x^2 + \dots + na_nx^{n-1} + \dots \quad (3)$$

Подставляя $x = 0$ в формулу (3), получаем $f'(0) = a_1$, откуда следует, что коэффициент 1-го порядка a_1 равен $f'(0)$. Дифференцируя формулу (3) получаем:

$$f''(x) = 2a_2 + 6a_3x + \dots + n(n-1)a_nx^{n-2} + \dots \quad (4)$$

Подставляя $x = 0$ в формулу (4), находим, что коэффициент 2-го порядка

$$a_2 = \frac{1}{2} f''(0).$$

Дифференцируя далее формулу (4), получаем

$$f'''(x) = 6a_3 + \dots + n(n-1)(n-2)a_nx^{n-3} + \dots,$$

откуда коэффициент 3-го порядка

$$a_3 = \frac{1}{6} f'''(0).$$

Повторяя операцию дифференцирования n раз, получаем

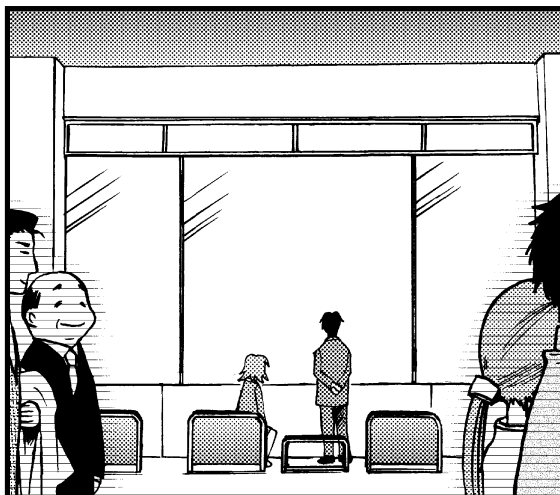
$$f^{(n)}(x) = n(n-1) \times \dots \times 2 \times 1 \times a_n + \dots$$

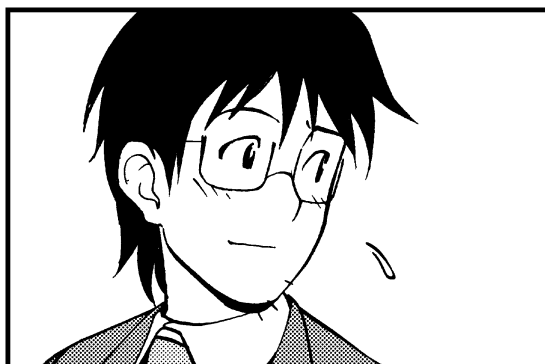
где $f^{(n)}(x)$ обозначает дифференцирование функции $f(x)$ n раз.

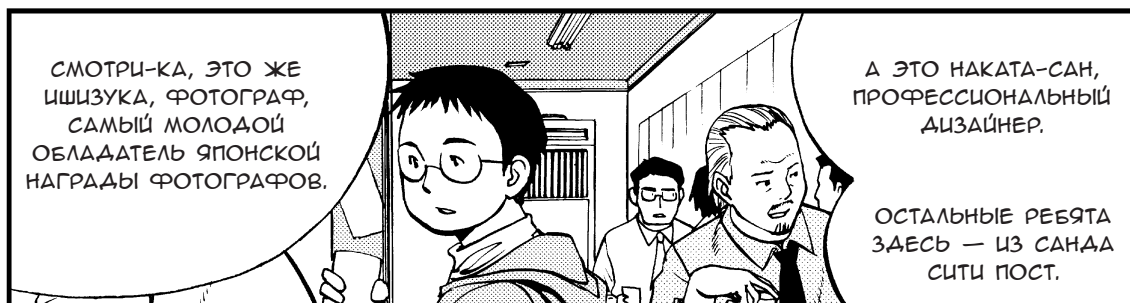
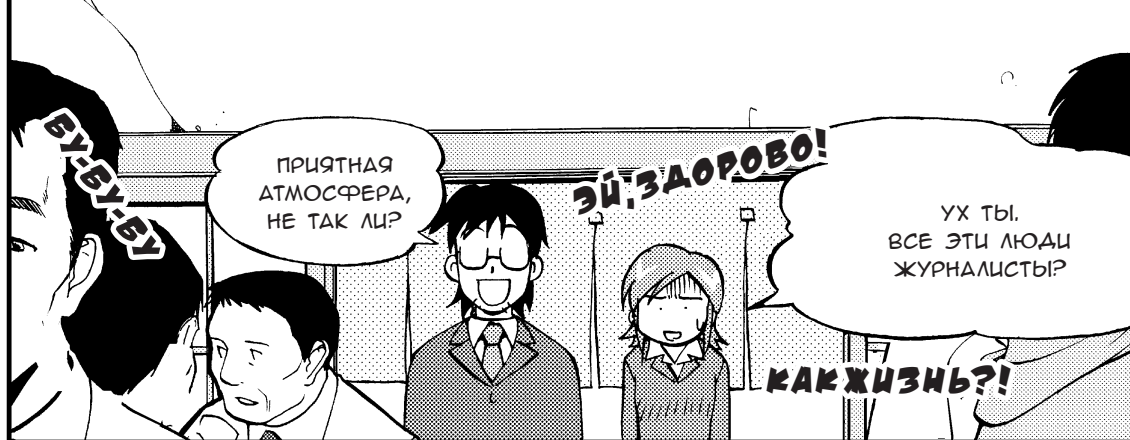
Таким образом коэффициент n -го порядка равен

$$a_n = \frac{1}{n!} f^{(n)}(0).$$

Выражение $n!$ читается как « n факториал» и соответствует выражению $n \times (n-1) \times (n-2) \times \dots \times 2 \times 1$.







Формула разложения в ряд Тейлора

Функция $f(x)$ раскладывается в ряд Тейлора вблизи точки $x = 0$ по формуле

$$f(x) = f(0) + \frac{1}{1!} f'(0)x + \frac{1}{2!} f''(0)x^2 + \frac{1}{3!} f'''(0)x^3 + \dots + \frac{1}{n!} f^{(n)}(0)x^n + \dots, \quad (5.2)$$

где

$f(0)$	член 0-го порядка (константа)	$a_0 = f(0);$
$f'(0)x$	член 1-го порядка	$a_1 = f'(0);$
$\frac{1}{2!} f''(0)x^2$	член 2-го порядка	$a_2 = \frac{1}{2!} f''(0);$
$\frac{1}{3!} f'''(0)x^3$	член 3-го порядка	$a_3 = \frac{1}{3!} f'''(0).$

Забудем на время про условия разложения в ряд Тейлора и про круг сходимости и, используя это разложение, проверим формулу (1) на стр. 151:

$$f(x) = \frac{1}{1-x}, \quad f'(x) = \frac{1}{(1-x)^2}, \quad f''(x) = \frac{2}{(1-x)^3}, \quad f'''(x) = \frac{6}{(1-x)^4}, \dots$$

$$f(0) = 1, \quad f'(0) = 1, \quad f''(0) = 2, \quad f'''(0) = 6, \dots, \quad f^{(n)}(0) = n!, \dots$$

Таким образом, имеем

$$f(x) = f(0) + \frac{1}{1!} f'(0)x + \frac{1}{2!} f''(0)x^2 + \frac{1}{3!} f'''(0)x^3 + \dots + \frac{1}{n!} f^{(n)}(0)x^n + \dots =$$

$$= 1 + x + \frac{1}{2!} \times 2x^2 + \frac{1}{3!} \times 6x^3 + \dots + \frac{1}{n!} n!x^n + \dots =$$

$$= 1 + x + x^2 + x^3 + \dots + x^n + \dots$$

ОНИ
СОВПАДАЮТ!



ЭТА ФОРМУЛА ЯВЛЯЕТСЯ МНОГОЧЛЕНОМ БЕСКОНЕЧНОЙ СТЕПЕНИ И ИСПОЛЬЗУЕТСЯ ДЛЯ ТОЧНОГО РАЗЛОЖЕНИЯ В ТОЧКЕ $x = 0$. НИЖЕ ПРИВЕДЕНА ФОРМУЛА ДЛЯ РАЗЛОЖЕНИЯ В ПРОИЗВОЛЬНОЙ ТОЧКЕ $x = a$. ДЛЯ ЕЁ ПРОВЕРКИ НАДО ВЫПОЛНИТЬ УПРАЖНЕНИЕ НА СТР. 176!

$$f(x) = f(a) + \frac{1}{1!} f'(a)(x-a) + \frac{1}{2!} f''(a)(x-a)^2 +$$

$$+ \frac{1}{3!} f'''(a)(x-a)^3 + \dots + \frac{1}{n!} f^{(n)}(a)(x-a)^n + \dots$$

РАЗЛОЖЕНИЕ В РЯД ТЕЙЛОРА ЯВЛЯЕТСЯ ПРЕВОСХОДНЫМ ИНСТРУМЕНТОМ ДЛЯ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ ФУНКЦИЙ!



5.3. РАЗЛОЖЕНИЕ РАЗЛИЧНЫХ ФУНКЦИЙ В РЯД ТЕЙЛОРА

Разложение в ряд Тейлора функции $f(x) = \sqrt{1+x}$

$$f(x) = \sqrt{1+x} = (1+x)^{1/2}, f'(x) = \frac{1}{2} (1+x)^{-1/2}, f''(x) = -\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} (1+x)^{-3/2},$$

$$f'''(x) = -\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{3}{2} (1+x)^{-5/2}, \dots, f(0) = 1, f'(0) = \frac{1}{2}, f''(0) = -\frac{1}{4}, f'''(0) = \frac{3}{8}, \dots$$

$$\sqrt{1+x} = 1 + \frac{1}{2}x + \frac{1}{2!} \times \left(-\frac{1}{4}\right)x^2 + \frac{1}{3!} \times \frac{3}{8}x^3 + \dots \quad \sqrt{1+x} = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + \frac{1}{16}x^3 \dots$$

Разложение в ряд Тейлора показательной функции e^x

$$f(x) = e^x, f'(x) = e^x, f''(x) = e^x, f'''(x) = e^x, \dots$$

$$e^x = 1 + \frac{1}{1!}x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{4!}x^4 + \dots + \frac{1}{n!}x^n + \dots$$

Подставляя $x = 1$, получаем

$$e = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \dots + \frac{1}{n!} + \dots$$

В ГЛАВЕ 4 МЫ УЗНАЛИ, ЧТО
ЧИСЛО e РАВНО ПРИМЕРНО 2,7.
ЗДЕСЬ МЫ ПОЛУЧИЛИ ВЫРАЖЕНИЕ
ДЛЯ ВЫЧИСЛЕНИЯ ЕГО ТОЧНОГО
ЗНАЧЕНИЯ.



Разложение логарифмической функции $\ln(1+x)$

$$f(x) = \ln(1+x), f'(x) = \frac{1}{1+x} = (1+x)^{-1}, f''(x) = -(1+x)^{-2}, f'''(x) = 2(1+x)^{-3},$$

$$f''''(x) = -6(1+x)^{-4}, \dots, f(0) = 0, f'(0) = 1, f''(0) = -1, f'''(0) = 2!, f''''(0) = -3!, \dots$$

$$\ln(1+x) = 0 + x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 - \frac{1}{4!}x^4 + \dots$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4 + \dots + (-1)^{n+1} \frac{1}{n}x^n + \dots$$

Разложение в ряд Тейлора тригонометрических функций

$$f(x) = \cos x, f'(x) = -\sin x, f''(x) = -\cos x, f'''(x) = \sin x, f''''(x) = \cos x, \dots$$

$$f(0) = 1, f'(0) = 0, f''(0) = -1, f'''(0) = 0, f''''(0) = 1, \dots$$

$$\cos x = 1 + 0x - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}0x^3 + \frac{1}{4!}1x^4 + \dots \quad \cos x = 1 - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 + \dots + (-1)^n \frac{1}{(2n)!}x^{2n} + \dots$$

Аналогично

$$\sin x = x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 + \dots + (-1)^{n-1} \frac{1}{(2n-1)!}x^{2n-1} + \dots$$

5.4. ЧТО ДАЁТ РАЗЛОЖЕНИЕ В РЯД ТЕЙЛОРА



РАЗЛОЖЕНИЕ В РЯД ТЕЙЛОРА ПОЗВОЛЯЕТ ЗАМЕНИТЬ СЛОЖНУЮ ФУНКЦИЮ МНОГОЧЛЕНОМ. ДОПУСТИМ, ТЕБЕ НАДО НАРИСОВАТЬ ГРАФИК $\ln(1+x)$, КАК ЭТО СДЕЛАТЬ?

ЧТОБЫ УЗНАТЬ ПОВЕДЕНИЕ СЛОЖНОЙ ФУНКЦИИ, НАДО АППРОКСИМИРОВАТЬ ЕЁ БОЛЕЕ ПРОСТЫМИ ФУНКЦИЯМИ, ТАК ВЕДЬ?



ЧТОБЫ ПОНЯТЬ, ЧТО НАМ ДАЁТ РАЗЛОЖЕНИЕ В РЯД ТЕЙЛОРА, ВОСПОЛЬЗУЕМСЯ ФОРМУЛОЙ ИЗ ПРИВЕДЁННОГО ВЫШЕ ПРИМЕРА

$$\ln(1+x) = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4 + \dots$$



Кубическое приближение

Линейное приближение

Приближение 0-го порядка

$$\ln(1+x) = 0 + x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4 + \dots$$

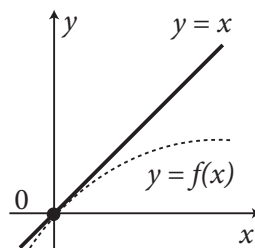
Квадратичное приближение

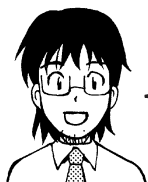
ВО-ПЕРВЫХ, ПРИБЛИЖЕНИЕ 0-ГО ПОРЯДКА ДАЁТ $\ln(1+x) \approx 0$ ВЕЛИКИ $x=0$. ЧТО ЭТО ЗНАЧИТ?

ММ..., НУ... ЭТО ЗНАЧИТ, ЧТО ЗНАЧЕНИЕ $f(x)$ РАВНО 0 ПРИ $x=0$ И ГРАФИК $f(x)$ ПРОХОДИТ ЧЕРЕЗ ТОЧКУ $(0, 0)$.



ВЕРНО. ДАЛЕЕ ИДЁТ ЛИНЕЙНОЕ ПРИБЛИЖЕНИЕ. КАК ВИДИШЬ, ИССЛЕДУЕМАЯ ФУНКЦИЯ $y=f(x)$ ЧЕМ-ТО НАПОМИНАЕТ $y=x$ ВЕЛИКИ ТОЧКИ $x=0$. ЗНАЧИТ, ФУНКЦИЯ ВОЗРАСТАЕТ ПРИ $x=0$. КАК МЫ УЖЕ ЗНАЕМ, ЛИНЕЙНОЕ ПРИБЛИЖЕНИЕ ЯВЛЯЕТСЯ УРАВНЕНИЕМ КАСАТЕЛЬНОЙ В РАССМАТРИВАЕМОЙ ТОЧКЕ.

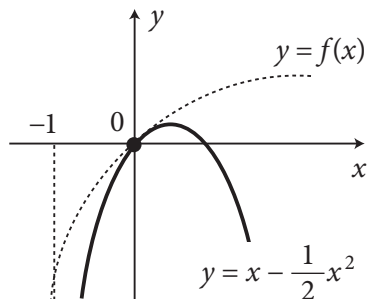




ТЕПЕРЬ ПЕРЕИДЁМ
К КВАДРАТИЧНОМУ
ПРИБЛИЖЕНИЮ.
РАССМОТРИМ ГРАФИК

$$\ln(1+x) \approx x - \frac{1}{2}x^2$$

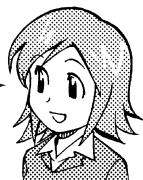
В ОКРЕСТНОСТИ $x=0$.
НОРИКО, ЧТО ЭТО ЗНАЧИТ?



ЭТО ЗНАЧИТ, ЧТО ВЕЛИКИ ТОЧКИ $x=0$ ФУНКЦИЮ $y=f(x)$
МОЖНО АППРОКСИМИРОВАТЬ ФУНКЦИЕЙ

$$y = x - \frac{1}{2}x^2,$$

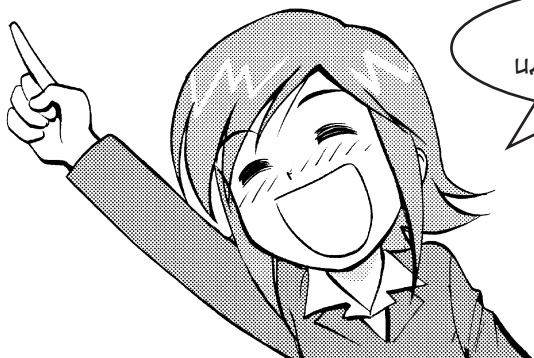
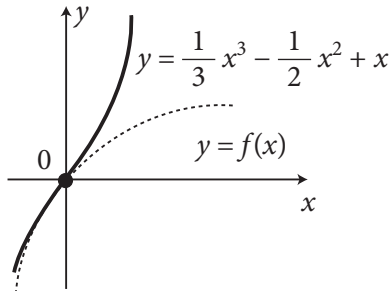
ГРАФИК КОТОРОЙ ВОГНУТ ВНИЗ ПРИ $x=0$. ТАКИМ
ОБРАЗОМ, КВАДРАТИЧНОЕ ПРИБЛИЖЕНИЕ ПОЗВОЛЯЕТ
НАЙТИ, КАК ИЗОГНУТ ГРАФИК В ТОЧКЕ РАЗЛОЖЕНИЯ В РЯД.



И ПОСЛЕДНИЙ РЫВОК —
КУБИЧЕСКОЕ ПРИБЛИЖЕНИЕ
ВЕЛИКИ $x=0$

$$\ln(1+x) \approx x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3,$$

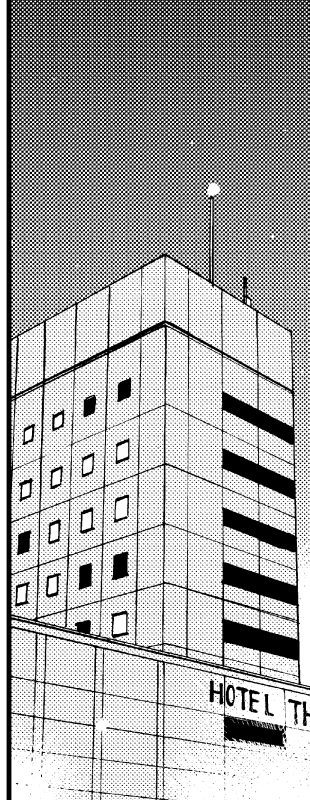
КОТОРОЕ ПОЗВОЛЯЕТ
УМЕНЬШИТЬ ОШИБКУ
КВАДРАТИЧНОГО
ПРИБЛИЖЕНИЯ.



А ТЕПЕРЬ, СЭКИ-САН,
ИДЁМ В СЛЕДУЮЩИЙ БАР!



?!



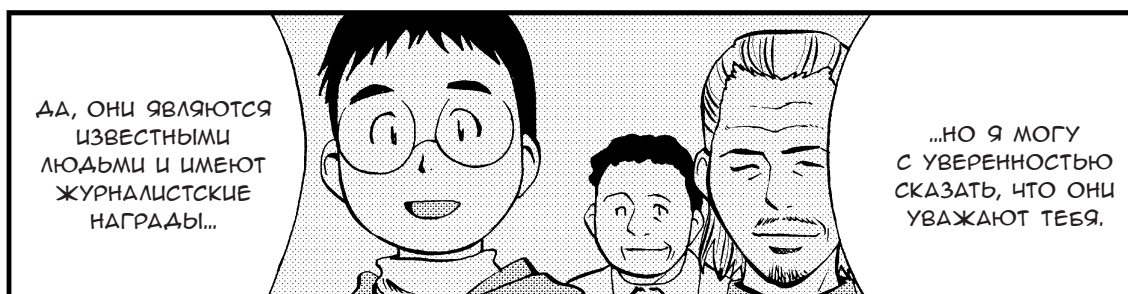
...ТЫ МОГЛА БЫ
ПОГОВОРИТЬ
ПОБОЛЬШЕ
С РЕБЯТАМИ
В ПИВНОМ БАРЕ.



НУ, ОНИ ВСЕ ВЫГЛЯДЕЛИ
ТАКИМИ ВЫДАЮЩИМИСЯ.
Я ЧУВСТВОВАЛА СЕБЯ,
КАК БЫ ЭТО СКАЗАТЬ,
НЕ В СВОЕЙ ТАРЕЛКЕ.



НО ЗАЧЕМ ВЫ
СПРАШИВАЕТЕ МЕНЯ
ОБ ЭТОМ, СЭКИ-САН!?



ДА, ОНИ ЯВЛЯЮТСЯ
ИЗВЕСТНЫМИ
ЛЮДЬМИ И ИМЕЮТ
ЖУРНАЛИСТСКИЕ
НАГРАДЫ...

...НО Я МОГУ
С УВЕРЕННОСТЬЮ
СКАЗАТЬ, ЧТО ОНИ
УВАЖАЮТ ТЕБЯ.



КАК ВЫ МОЖЕТЕ БЫТЬ
СЧАСТЛИВЫ, РАБОТАЯ
В ЭТОМ ЗАБРОШЕННОМ
ОТДЕЛЕНИИ?



ВАША РАБОТА
СТАЛА ТАКОЙ
НЕЗНАЧИ-
ТЕЛЬНОЙ!



ЕЩЕ БОЛЬШЕ
НЕ НАЛИВАТЬ.

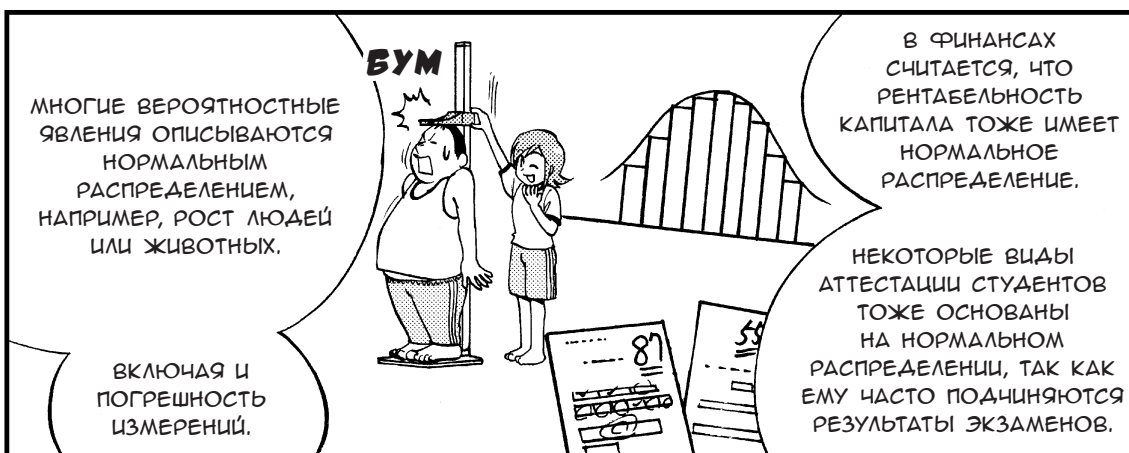
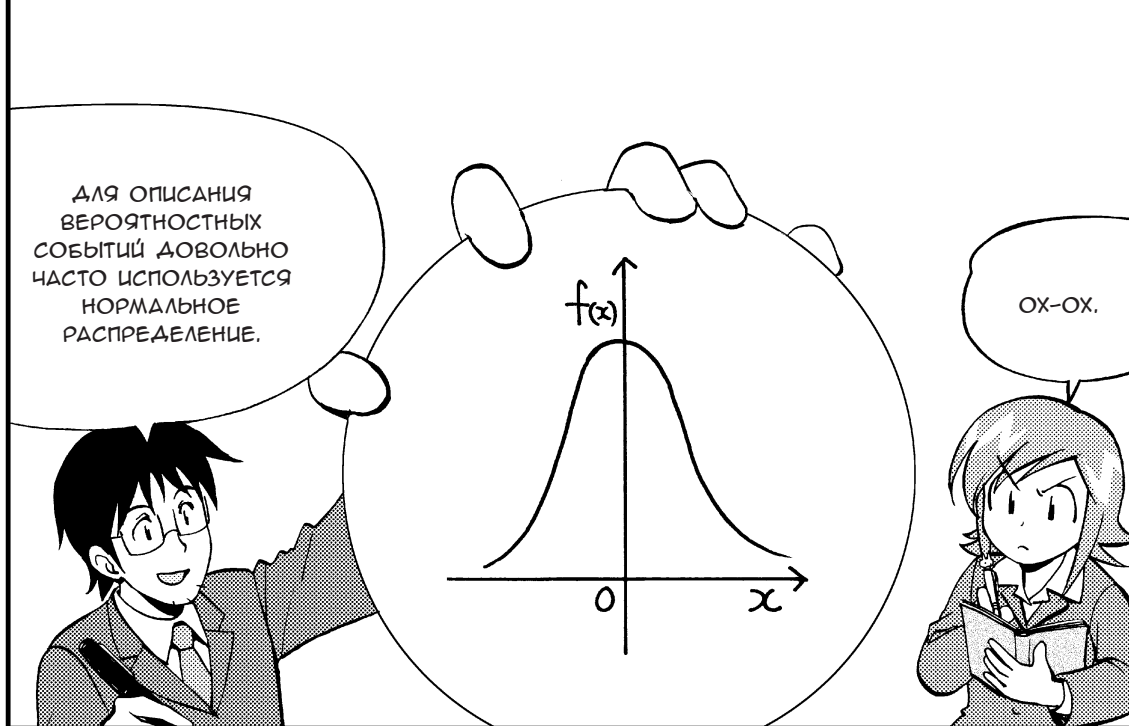


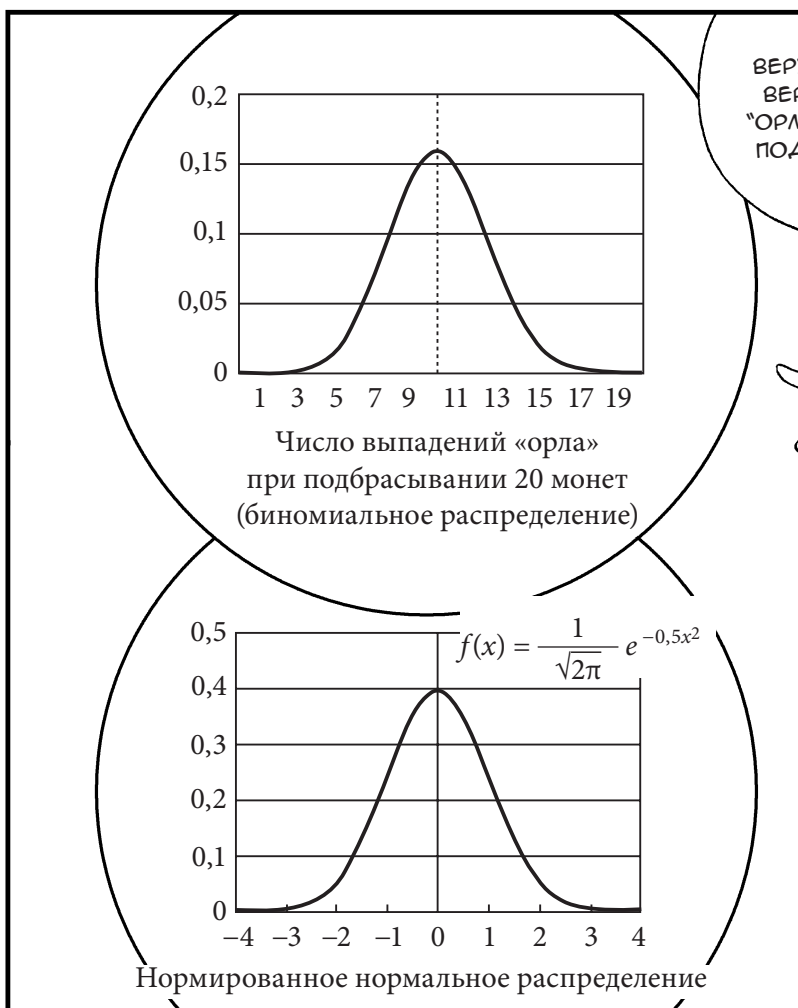
ИНТЕРЕСНО, КАКОВА
ВЕРОЯТНОСТЬ ТОГО,
ЧТО Я КОГДА-НИБУДЬ
СТАНУ ТАКИМ ЖЕ
ПЕРВОКЛАССНЫМ
ЖУРНАЛИСТОМ, КАК
ТЕ ЛЮДИ В ПИВНОЙ.

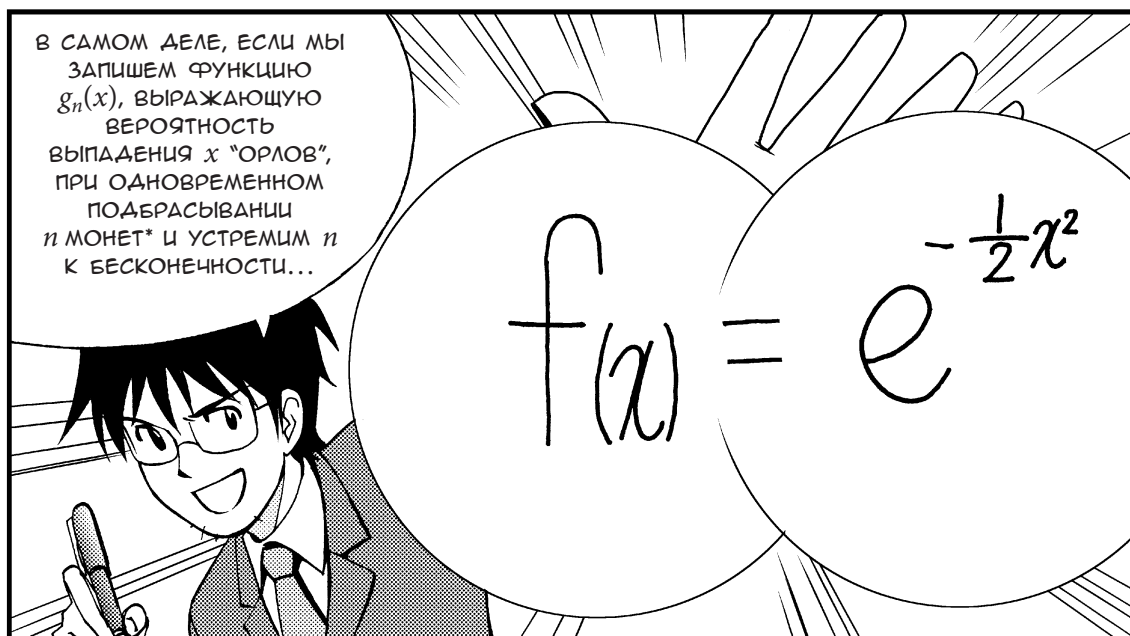


ЕСЛИ ВСЁ, ЧТО ТЕБЯ
ВОЛНУЕТ, — ЭТО ВЕРОЯТНОСТЬ
СТАТЬ ВЕЛИКОЙ, ТЫ НИКОГДА
НИКЕМ НЕ СТАНЕШЬ.
ТЫ НИЧЕГО НЕ ДОБЬЕШЬСЯ,
ЕСЛИ БУДЕШЬ ПРОСТО
ЧЕГО-ТО ДОЖДААТЬСЯ.









* Распределение вероятности выпадения x орлов при подбрасывании n монет подчиняется биномиальному распределению. Например, найдём вероятность выпадения 3 «орлов» при подбрасывании 5 монет. Вероятность выпадения комбинации ООРОР (О — «орлы», Р — «решки») равна $\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \left(\frac{1}{2}\right)^5$.

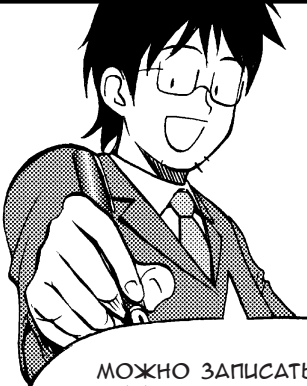
Так как число комбинаций с 3 «орлами» и 2 «решками» равно ${}_5C_3$, то вероятность выпадения 3 «орлов» будет равна ${}_5C_3 (1/2)^5$. В общем случае вероятность выпадения x «орлов» при подбрасывании n монет будет равна ${}_nC_x (1/2)^n$. Покажем, что если n велико, то биномиальное распределение стремится к нормальному распределению.

ИСПОЛЬЗУЯ
БИНОМИАЛЬНОЕ
РАСПРЕДЕЛЕНИЕ...

$$g_n(x) = {}_n C_x \left(\frac{1}{2}\right)^x \left(\frac{1}{2}\right)^{n-x}$$

$$= {}_n C_x \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

МОЖНО ЗАПИСАТЬ
 $g_n(x)$ СЛЕДУЮЩИМ
ОБРАЗОМ.



ТАК КАК ФУНКЦИЯ
НОРМАЛЬНОГО
РАСПРЕДЕЛЕНИЯ $f(x)$
СИММЕТРИЧНА
ОТНОСИТЕЛЬНО $x = 0$,
А $g_n(x)$ —
ОТНОСИТЕЛЬНО $x = 1/2$...

ЧИРК
ЧИРК

КАК
МНОГО
ПОДСТА-
ВОК...

...ИСПОЛЬЗУЕМ ДЛЯ
НОРМИРОВАНИЯ ФУНКЦИЮ
 $g_n\left(\frac{n}{2}\right)$.



СНАЧАЛА...

$$g_n\left(\frac{n}{2}\right) = {}_n C_{\frac{n}{2}} \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

...РАЗДЕЛИВ
 $g_n(x)$ НА $g_n(n/2)$...

$$h_n(x) = \frac{g_n(x)}{g_n(n/2)} = \frac{{}_n C_x}{{}_n C_{\frac{n}{2}}}$$

ПОЛУЧИМ НОР-
МИРОВАННУЮ
ФУНКЦИЮ $h_n(x)$.

ДАЛЕЕ,
ПОДСТАВЛЯЯ...

$$g_n(x) = g_n\left(\frac{n}{2}\right) \times h_n(x)$$

...ПОЛУЧАЕМ
ВЫРАЖЕНИЕ
ДЛЯ ${}_n C_x$...

$${}_n C_x = \frac{n!}{x!(n-x)!}, {}_n C_{\frac{n}{2}} = \frac{n!}{\left(\frac{n}{2}\right)!\left(\frac{n}{2}\right)!}$$

и ${}_n C_{n/2}$.

$$h_n(x) = \frac{\left(\frac{n}{2}\right)! \left(\frac{n}{2}\right)!}{x!(n-x)!}$$



ДРУГИМИ
СЛОВАМИ...

$$x = \frac{n}{2} + \frac{\sqrt{n}}{2} \times 1 \rightarrow z = 1$$

$$x = \frac{n}{2} + \frac{\sqrt{n}}{2} \times 2 \rightarrow z = 2$$

$$x = \frac{n}{2} + \frac{\sqrt{n}}{2} \times 3 \rightarrow z = 3$$

...МЫ ВВОДИМ
НОВУЮ
ПЕРЕМЕННУЮ z ,
РАВНУЮ ЧИСЛУ
СТАНДАРТНЫХ
ОТКЛОНЕНИЙ
ОТ ЦЕНТРА.



ДАЛЕЕ ЗАМЕНЯЕМ В h_n

x НА

$$x = \frac{n}{2} + \frac{\sqrt{n}}{2} z$$

и ...

$$h_n(x) = \frac{\left(\frac{n}{2}\right)! \left(\frac{n}{2}\right)!}{\left(\frac{n}{2} + \frac{\sqrt{n}}{2} z\right)! \left(\frac{n}{2} - \frac{\sqrt{n}}{2} z\right)!}$$

$\left(n - \left(\frac{n}{2} + \frac{\sqrt{n}}{2} z\right)\right) \text{ ф.}$

...ЛОГАРИФИМУЕМ*

$$\ln h_n(x)$$

$$= \ln \left(\frac{n}{2}\right)! + \ln \left(\frac{n}{2}\right)! - \ln \left(\frac{n}{2} + \frac{\sqrt{n}}{2} z\right)! - \ln \left(\frac{n}{2} - \frac{\sqrt{n}}{2} z\right)!$$

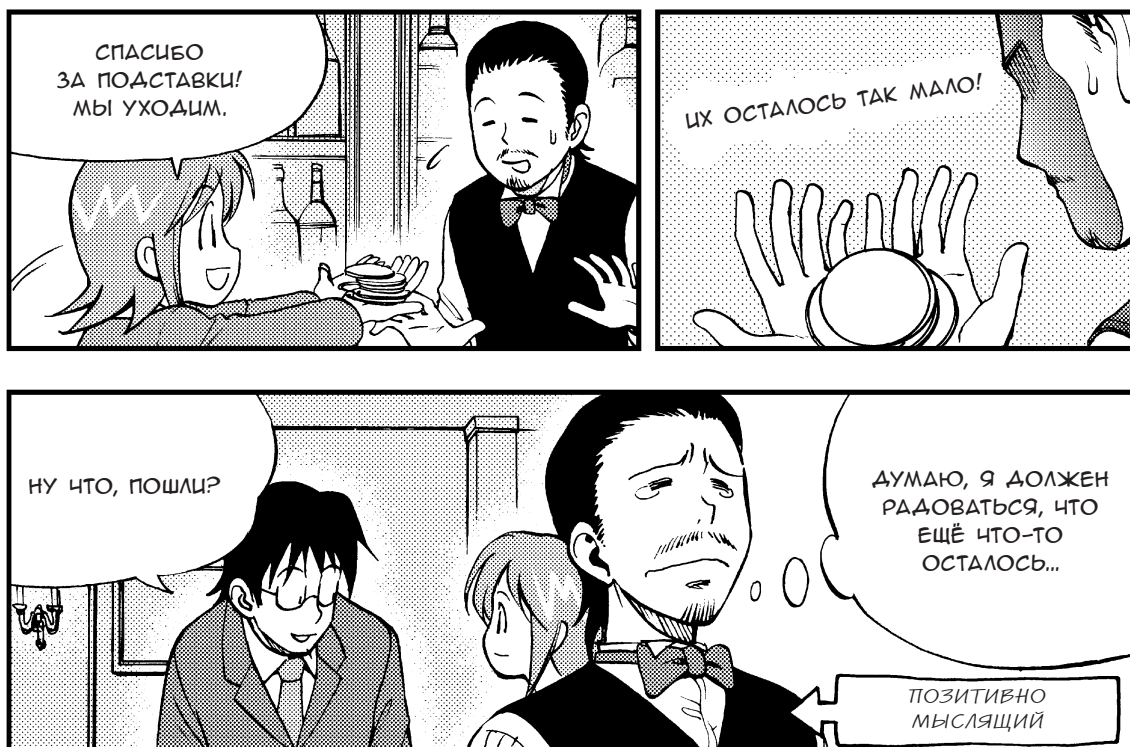
ТЕПЕРЬ
НАМ НУЖНО ЭТО
ПОСЧИТАТЬ, НО,
МОЖЕТ, ПОЙДЕМ
В ДРУГОЙ БАР?



* Логарифмировать можно по любому основанию.
Мы используем натуральный логарифм и формулы:

$$\ln ab = \ln a + \ln b$$

$$\ln \frac{d}{c} = \ln d - \ln c.$$



Найдём приближение для $\ln(m!)$:

$$\ln m! = \ln 1 + \ln 2 + \ln 3 + \dots + \ln m.$$

Если мы сложим площади закрашенных прямоугольников на графике $\ln x$, то получим

$$\ln 2 + \dots + \ln m \approx \int_1^m \ln x dx.$$

Так как

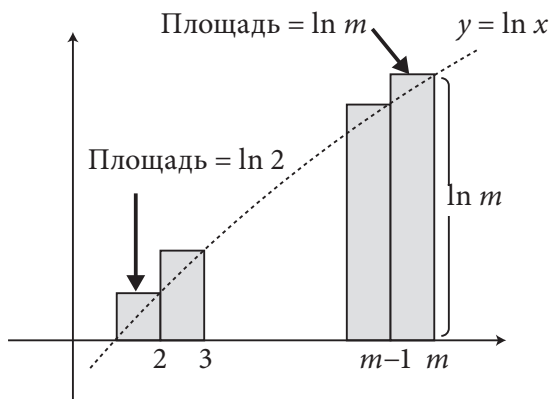
$$(x \ln x - x)' = \ln x + x \times \frac{1}{x} - 1 = \ln x,$$

то, используя основную теорему интегрирования, можно записать

$$\begin{aligned} \int_1^m \ln x dx &= (m \ln m - m) - (1 \ln 1 - 1) = \\ &= m \ln m - m + 1 = m(\ln m - 1) + 1. \end{aligned}$$

Нас интересуют большие значения m , для которых $\ln m \gg 1$. Поэтому, пренебрегая 1, получаем следующую приближённую формулу:

$$\ln m! \approx m \ln m.$$





$$\ln h_n(x) \sim \frac{n}{2} \ln \frac{n}{2} + \frac{n}{2} \ln \frac{n}{2} - \left(\frac{n}{2} + \frac{\sqrt{n}}{2} z\right) \ln \left(\frac{n}{2} + \frac{\sqrt{n}}{2} z\right) - \left(\frac{n}{2} - \frac{\sqrt{n}}{2} z\right) \ln \left(\frac{n}{2} - \frac{\sqrt{n}}{2} z\right)$$

После замены $\ln \left(\frac{n}{2} + \frac{\sqrt{n}}{2} z\right) = \ln \left\{ \frac{n}{2} \left(1 + \frac{\sqrt{n}}{n} z\right) \right\} = \ln \frac{n}{2} + \ln \left(1 + \frac{\sqrt{n}}{n} z\right)$
и тождественных преобразований получаем:

$$\ln h_n(x) \sim - \left[\left(\frac{n}{2} + \frac{\sqrt{n}}{2} z\right) \ln \left(1 + \frac{\sqrt{n}}{n} z\right) + \left(\frac{n}{2} - \frac{\sqrt{n}}{2} z\right) \ln \left(1 - \frac{\sqrt{n}}{n} z\right) \right]$$



ПРИ СТРЕМЛЕНИИ t
К НУЛЮ МОЖНО
ЗАПИСАТЬ

$$\ln(1+t) \sim t - \frac{1}{2}t^2^*$$



ТЕПЕРЬ, ИЗ ТОГО, ЧТО

$$\frac{\sqrt{n}}{n} = \frac{1}{\sqrt{n}}$$

СТРЕМИТСЯ К НУЛЮ, ЕСЛИ n
ДОСТАТОЧНО ВЕЛИКО,
МОЖНО СЧИТАТЬ, ЧТО ДЛЯ
ЛЮБОГО КОНЕЧНОГО
ЗНАЧЕНИЯ z ВЫРАЖЕНИЕ

$$\frac{\sqrt{n}}{n} z$$

ТАКЖЕ СТРЕМИТСЯ К НУЛЮ.



* Квадратичное приближение, см. стр. 159.

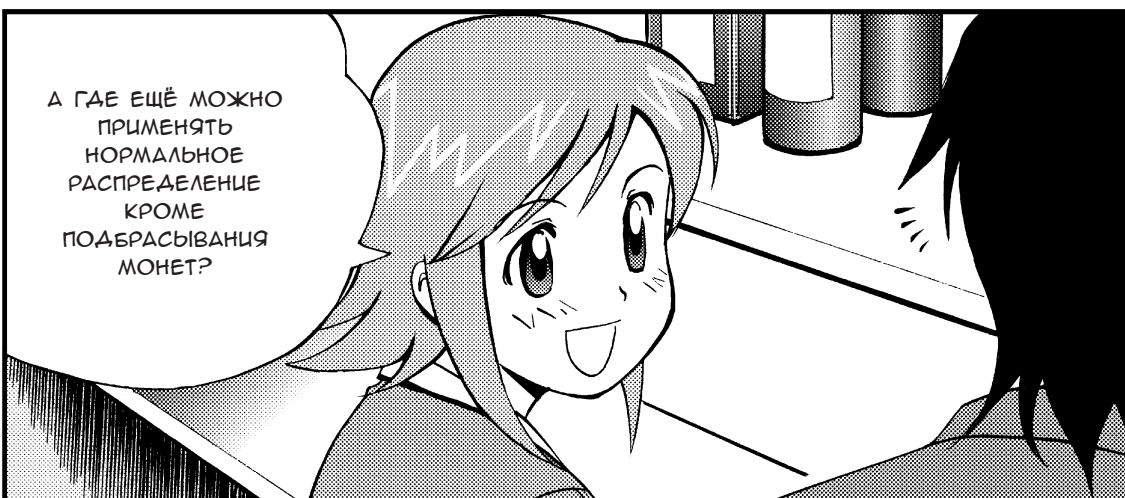
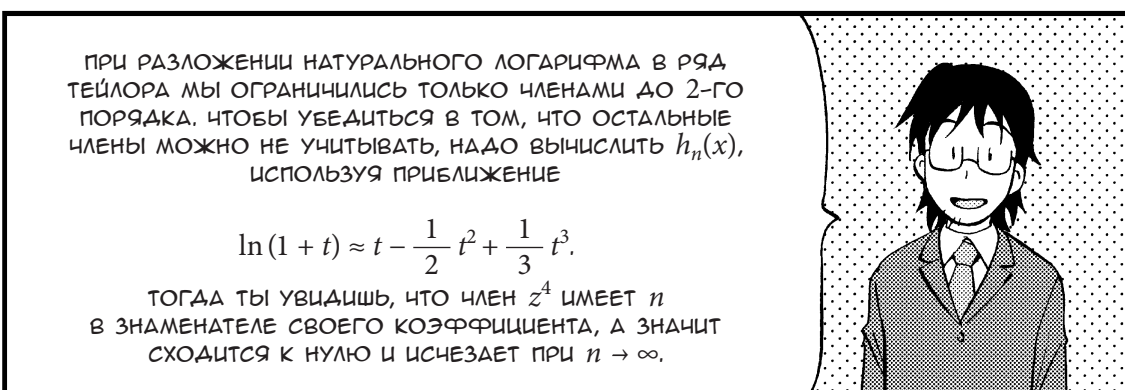
В РЕЗУЛЬТАТЕ:

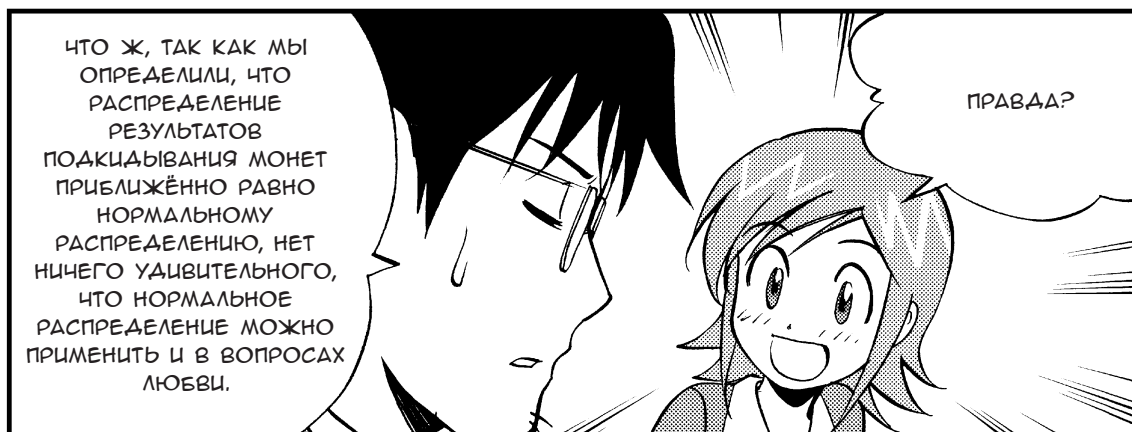
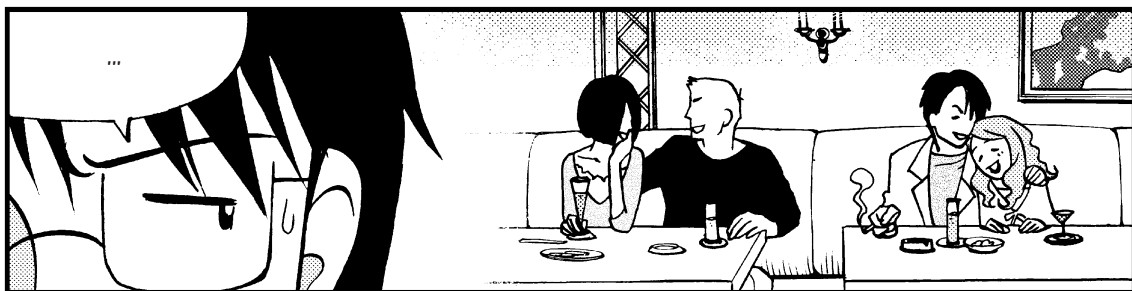
$$\ln\left(1 + \frac{\sqrt{n}}{n} z\right) \sim \frac{\sqrt{n}}{n} z - \frac{1}{2} \frac{1}{n} z^2$$

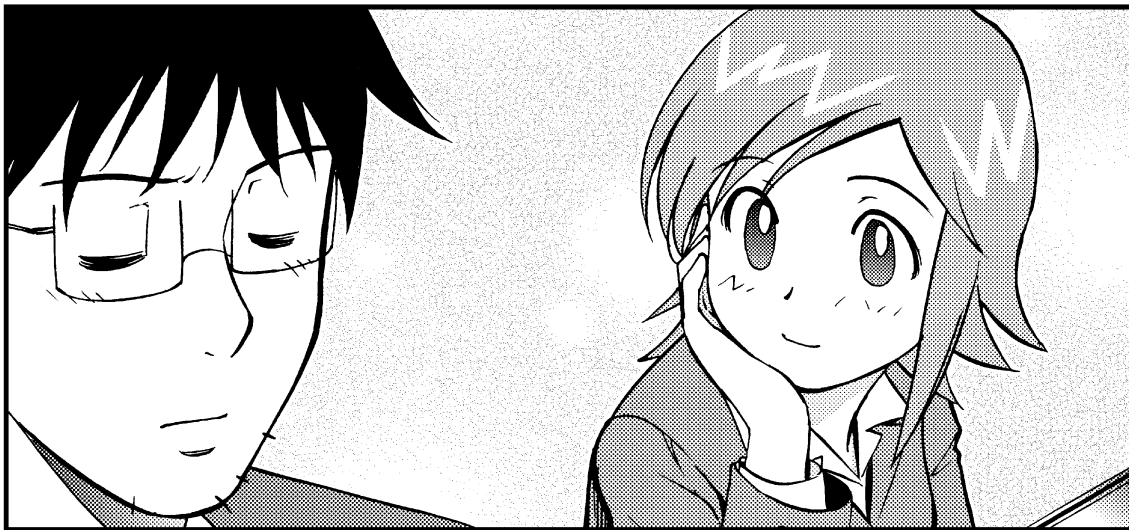
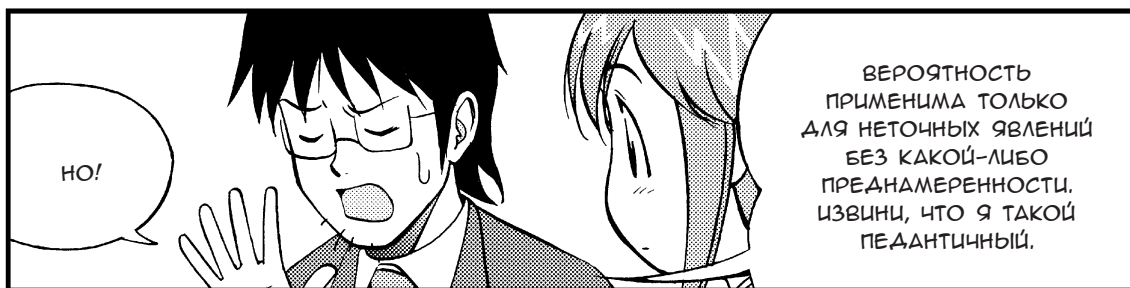
$$\ln\left(1 - \frac{\sqrt{n}}{n} z\right) \sim -\frac{\sqrt{n}}{n} z - \frac{1}{2} \frac{1}{n} z^2$$

ПОДСТАВЛЯЕМ
ЭТО В НАШЕ
ВЫРАЖЕНИЕ И
ПОЛУЧАЕМ:

$$\begin{aligned} \ln h_n(x) &\sim -\left[\left(\frac{n}{2} + \frac{\sqrt{n}}{2} z\right)\left(\frac{\sqrt{n}}{n} z - \frac{1}{2} \frac{1}{n} z^2\right) + \left(\frac{n}{2} - \frac{\sqrt{n}}{2} z\right)\left(-\frac{\sqrt{n}}{n} z - \frac{1}{2} \frac{1}{n} z^2\right)\right] \\ &= -\left[z^2 - \frac{1}{2} z^2\right] = -\frac{1}{2} z^2 \end{aligned}$$







5.5. УПРАЖНЕНИЯ К ГЛАВЕ 5

1. Найти разложение в ряд Тейлора функции $f(x) = e^{-x}$ при $x = 0$.
2. Найти квадратичное приближение $f(x) = \frac{1}{\cos x}$ при $x = 0$.
3. Вывести формулу разложения в ряд Тейлора функции $f(x)$ с центром в точке $x = a$, которая приведена на стр. 157. Другими словами, надо найти значения коэффициентов a_n в формуле

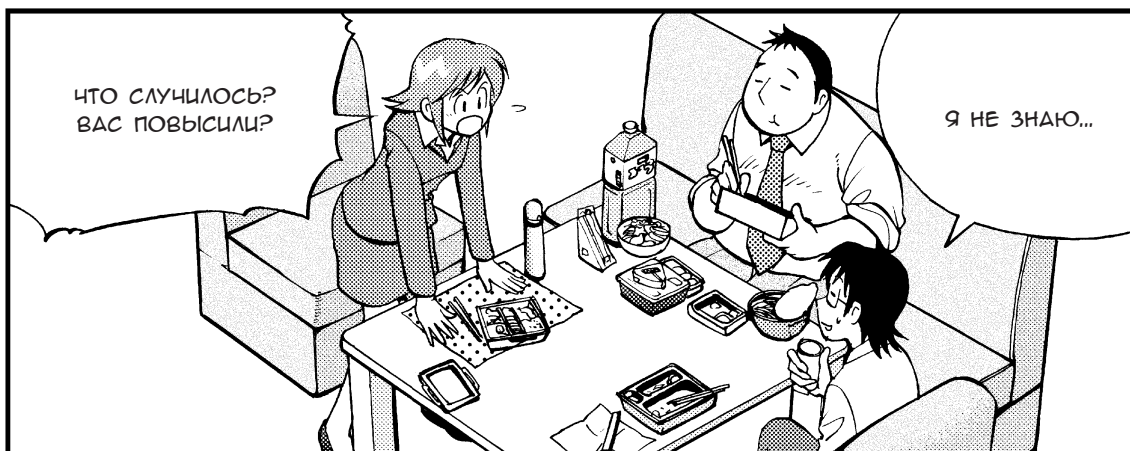
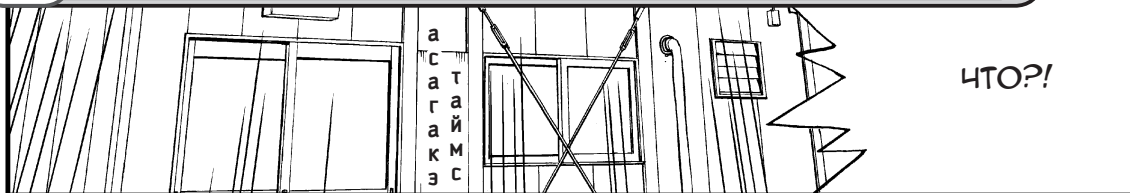
$$f(x) = a_0 + a_1(x - a) + a_2(x - a)^2 + \dots + a_n(x - a)^n + \dots$$

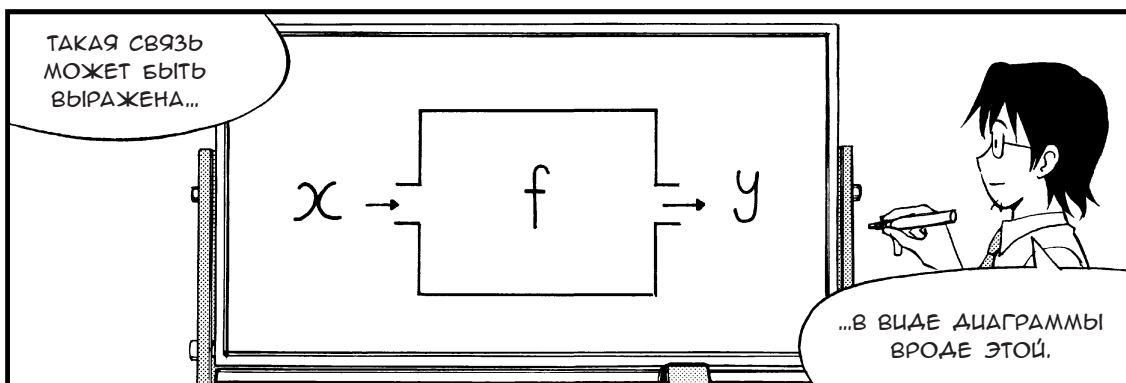
6

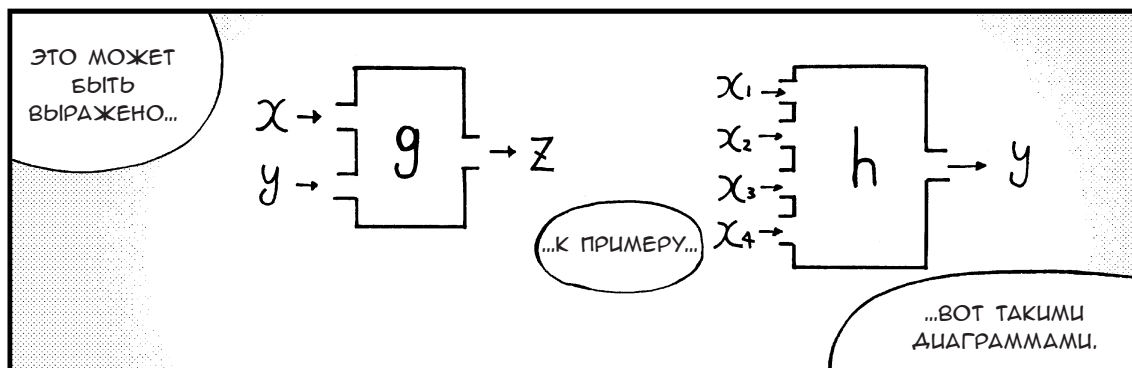
ИЗУЧАЕМ ЧАСТНЫЕ ПРОИЗВОДНЫЕ!

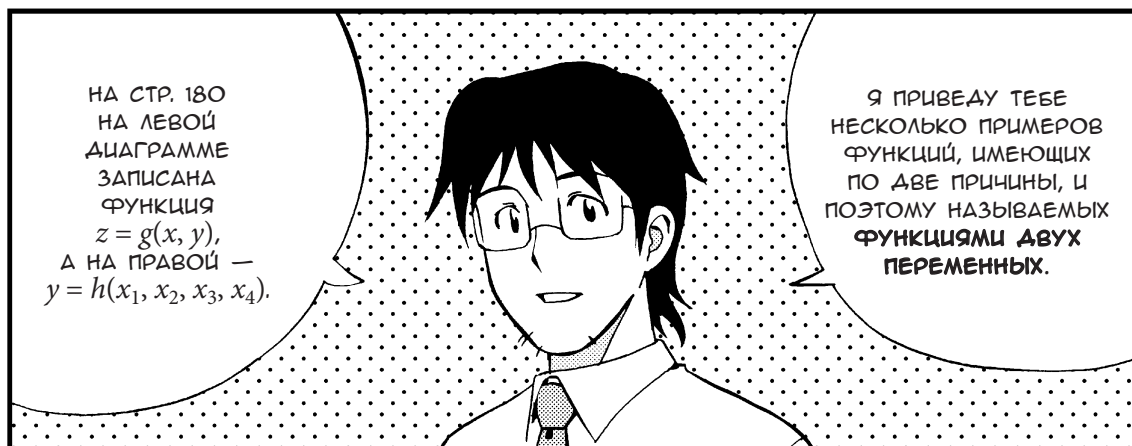


6.1. ФУНКЦИИ НЕСКОЛЬКИХ ПЕРЕМЕННЫХ









Пример 1

Высота тела, брошенного вверх со скоростью v , через время t задаётся функцией

$$h(v, t) = vt - 4,9t^2 \text{ [м]}.$$

Пример 2

Концентрация сахарного сиропа, полученного растворением y граммов сахара в x граммах воды, задаётся функцией

$$f(x, y) = \frac{y}{x + y} \times 100.$$

Пример 3

Общее количество производимых товаров Y (ВВП — валовой внутренний продукт) является функцией общего количества оборудования и станков K (называемого капиталом) и количества рабочих L — $Y(L, K)$.



В ЭКОНОМИКЕ ИСПОЛЬЗУЕТСЯ
ПРИБЛИЖЁННАЯ ФУНКЦИЯ КОББА-ДУГЛАСА
 $Y(L, K) = \beta L^\alpha K^{1-\alpha}$, ГДЕ α И β — КОНСТАНТЫ.
СМОТРИ СТР. 201.

Пример 4

В физике давление идеального газа P , его объём V и температура T связаны между собой функцией

$$T(P, V) = \gamma PV.$$

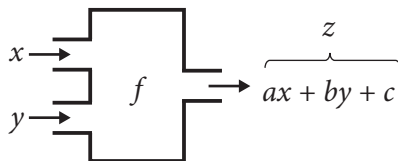
6.2. ЛИНЕЙНЫЕ ФУНКЦИИ НЕСКОЛЬКИХ ПЕРЕМЕННЫХ

КАК ТЫ ДУМАЕШЬ,
ЧТО НАДО СДЕЛАТЬ
ДЛЯ ИССЛЕДОВАНИЯ
СВОЙСТВ ФУНКЦИИ
ДВУХ ПЕРЕМЕННЫХ?

ИСПОЛЬЗОВАТЬ
ПРЕДСТАВЛЕНИЕ
В ВИДЕ ЛИНЕЙНЫХ
ФУНКЦИЙ?

ВЕРНО, НО, ТАК КАК ТЕПЕРЬ У НАС
ФУНКЦИЯ ДВУХ ПЕРЕМЕННЫХ, ТО
БУДЕМ ИСПОЛЬЗОВАТЬ ЛИНЕЙНЫЕ
ФУНКЦИИ ДВУХ ПЕРЕМЕННЫХ.

ЛИНЕЙНЫЕ ФУНКЦИИ ДВУХ
ПЕРЕМЕННЫХ ЗАПИСЫВАЮТСЯ
КАК $z = f(x, y) = ax + by + c$,
ГДЕ a , b И c —
КОНСТАНТЫ.



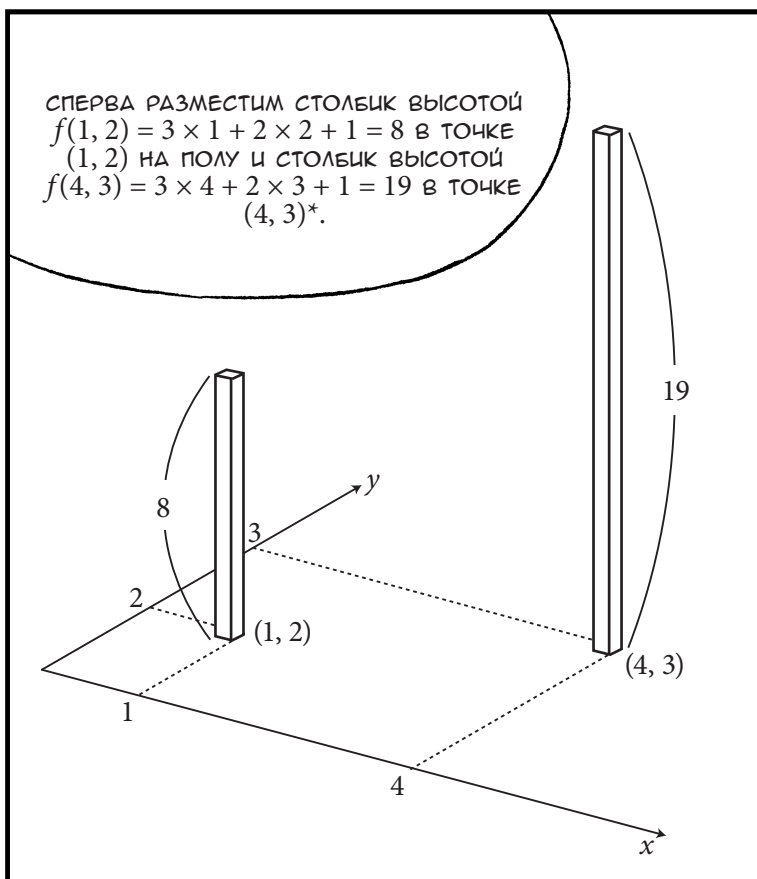
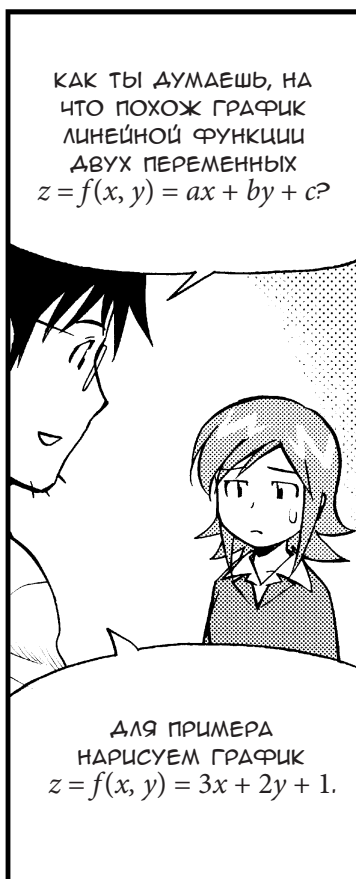
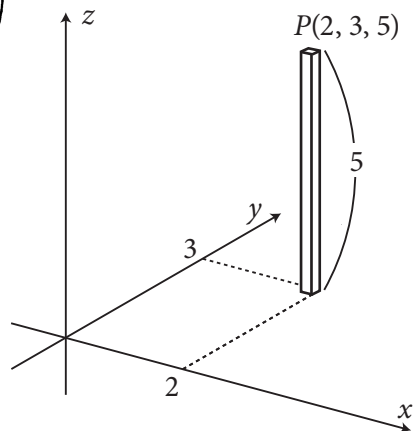
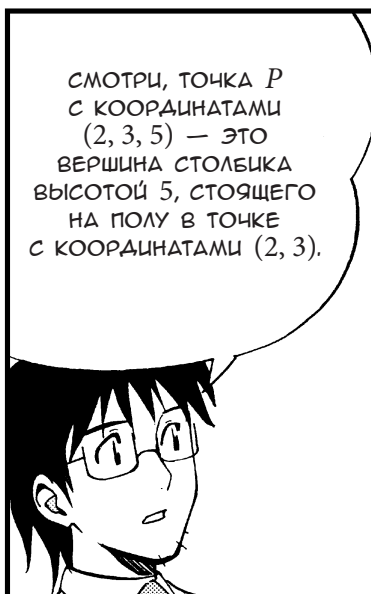
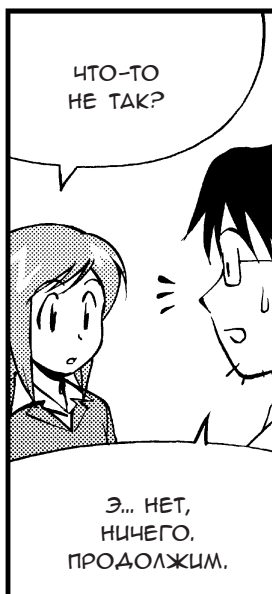
НАПРИМЕР,
 $z = 3x + 2y + 1$
ИЛИ
 $z = -x + 9y - 2$,
ПОНЯТНО?

ТЕПЕРЬ ДАВАЙ ПОСМОТРИМ,
НА ЧТО ПОХОЖИ ИХ ГРАФИКИ.
ТАК КАК У НИХ ДВА ПАРАМЕТРА
НА ВХОДЕ (x И y) И ОДИН НА
ВЫХОДЕ (z), ЕСТЕСТВЕННО
ИСПОЛЬЗОВАТЬ ТРЁХМЕРНЫЕ
КООРДИНАТЫ.

ПРЕДСТАВЬ СЕБЕ
РИСУНОК
НА КОТОРОМ
ПЛОСКОСТЬ
 $x-y$ — ПОЛ,
А Ось z — СТОЛЕ,
ТОЧНЕЕ СТОЛБИК.

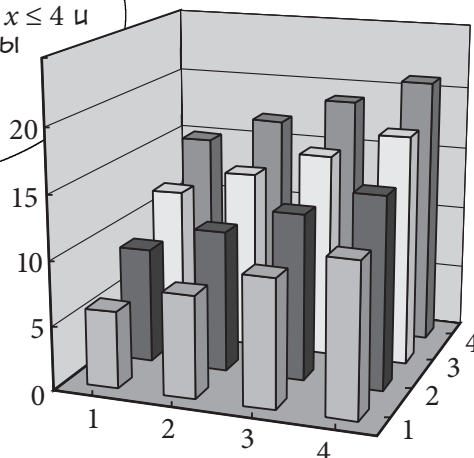
СТОЛБИК?

ХМ-М

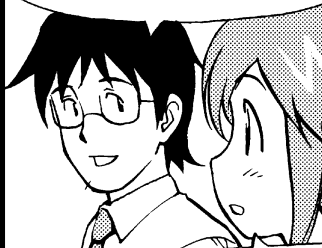


* Для упрощения здесь указываются двумерные координаты $(4, 3)$ вместо трёхмерных $(4, 3, 0)$.

АНАЛОГИЧНЫМ ОБРАЗОМ ПОСТРОИМ ЕЩЁ 16 СТОЛЕБКОВ В 16 ТОЧКАХ (x, y) , УДОВЛЕТВОРЯЮЩИХ УСЛОВИЯМ $1 \leq x \leq 4$ И $1 \leq y \leq 4$. ОНИ ПОКАЗАНЫ НА РИСУНКЕ.



ЕСЛИ ПОСМОТРЕТЬ НА РИСУНОК ВНИМАТЕЛЬНО, ТО МОЖНО ЗАМЕТИТЬ, ЧТО ВЕРХУШКИ СТОЛЕБКОВ НАПОМИНАЮТ ПЛОСКОСТЬ, ТАК?



АА, Я ВИЖУ ЭТО!

ТЕПЕРЬ ВЗГЛЯНИ НА СТОЛЕБКИ НА БЛИЖАЙШЕЙ СТОРОНЕ.

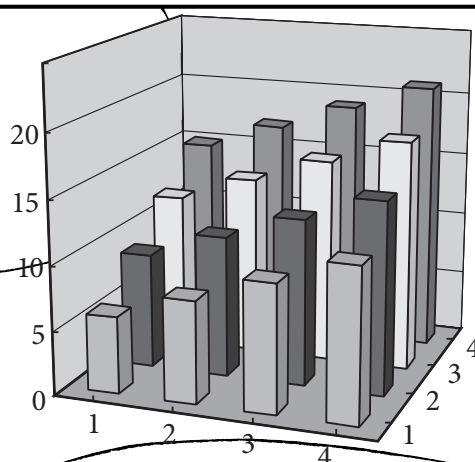


ОНИ ИМЕЮТ ВЫСОТЫ $f(1, 1) = 6$, $f(2, 1) = 9$, $f(3, 1) = 12$ И $f(4, 1) = 15$.

ЭТИ ТОЧКИ СООТВЕТСТВУЮТ УРАВНЕНИЮ ПЛОСКОСТИ ВИДА $z = f(x, y) = 3x + 2y + 1$, КОТОРОЕ ПРИ $y = 1$ ПРЕВРАЩАЕТСЯ В УРАВНЕНИЕ ПРЯМОЙ ЛИНИИ $z = f(x, y) = 3x + 2 \times 1 + 1 = 3x + 3$.



ДАЛЕЕ ДАВАЙ ПОСМОТРИМ НА ВЫСОТУ СТОЛЕБКОВ, РАСПОЛОЖЕННЫХ ВО ВТОРОМ РЯДУ: $f(1, 2) = 8$, $f(2, 2) = 11$, $f(3, 2) = 14$ И $f(4, 2) = 17$. КАЖДЫЙ ИЗ НИХ НА 2 ВЫШЕ СТОЛЕБКА ИЗ ПЕРВОГО РЯДА.

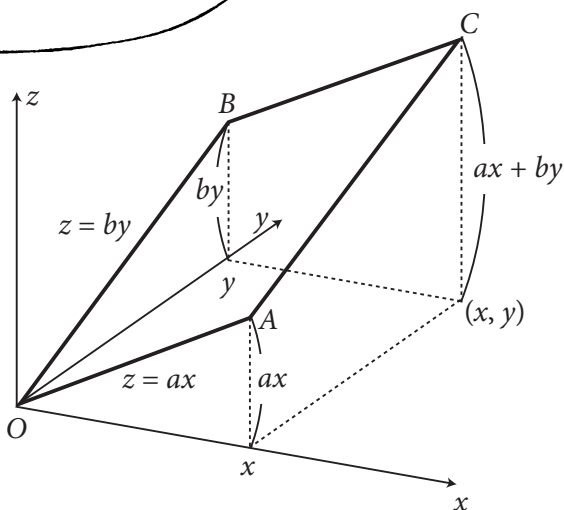


АНАЛОГИЧНО ВЫСОТЫ СТОЛЕБКОВ ИЗ 3-ГО РЯДА ($f(1, 3) = 10$, $f(2, 3) = 13$, $f(3, 3) = 16$ И $f(4, 3) = 19$) ТОЖЕ НА 2 ВЫШЕ СТОЛЕБКОВ ИЗ ПРЕДЫДУЩЕГО 2-ГО РЯДА.

ОСТАЛЬНЫЕ РЯДЫ
ТАКЖЕ НА 2 ВЫШЕ
ПРЕДЫДУЩИХ РЯДОВ,
ИЗ ЧЕГО СЛЕДУЕТ...

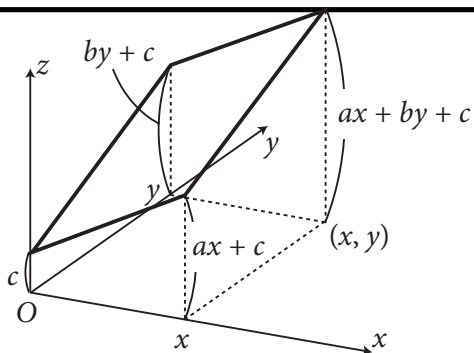
...ЧТО ВЕРШИНЫ
СТОЛЕЧКОВ ОБРАЗУЮТ
ПЛОСКОСТЬ. ТЕПЕРЬ
ПОПРОБУЕМ ОБОБЩИТЬ
ЭТО.

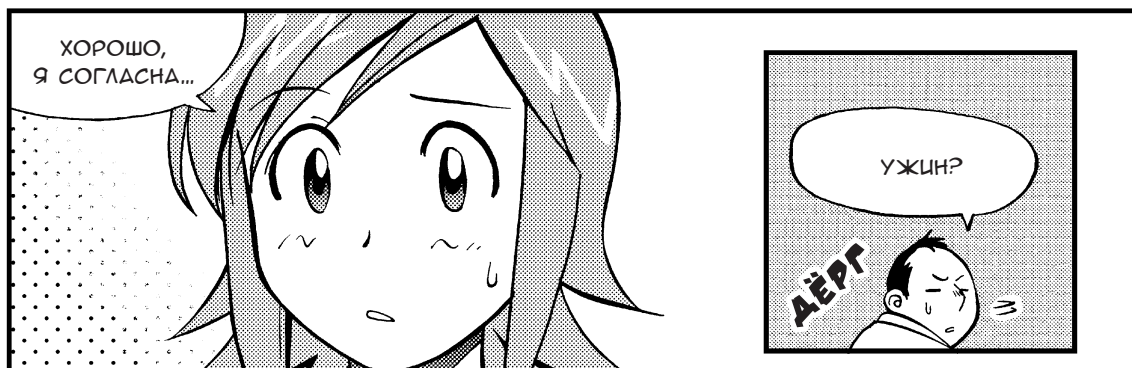
СНАЧАЛА НАРИСУЕМ
ГРАФИК ФУНКЦИИ
 $z = f(x, y) = ax + by$
(КОНСТАНТА $c = 0$).

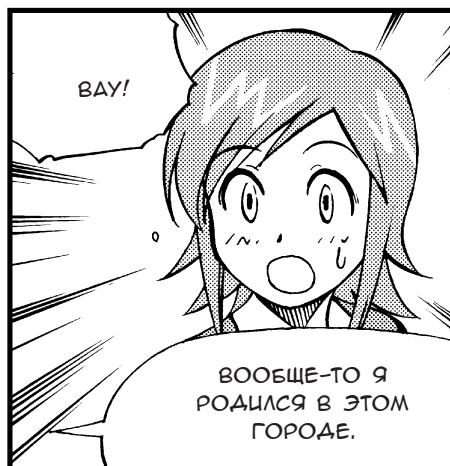


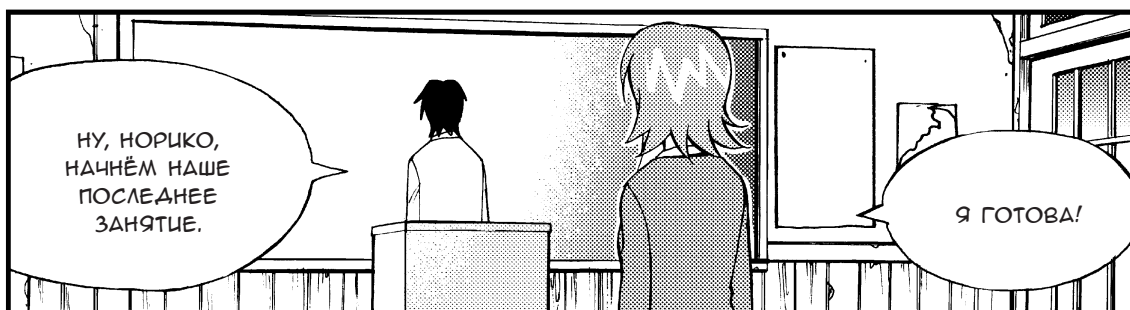
ИЗОБРАЗИМ ПЛОСКОСТЬ, ПРЕДСТАВЛЯЮЩУЮ ФУНКЦИЮ $f(x, y)$. НАЧНЁМ В ТОЧКЕ O , КОТОРУЮ МЫ ЗНАЕМ КАК $(0, 0, 0)$, ИЛИ НАЧАЛО ОТСЧЁТА. ИЗ НЕЁ ПРОВЕДЁМ ОТРЕЗОК OA , СООТВЕТСТВУЮЩИЙ ФУНКЦИИ $z = ax$, ПОЛУЧАЕМОЙ ИЗ $f(x, y)$ ПРИРАВНИВАНИЕМ y К НУЛЮ И ИМЕЮЩЕЙ НАКЛОН a . АНАЛОГИЧНО СТРОИМ ОТРЕЗОК OB , СООТВЕТСТВУЮЩИЙ ФУНКЦИИ $z = by$ С НАКЛОНОМ b , ПОЛУЧАЕМОЙ ПРИРАВНИВАНИЕМ x К НУЛЮ. ЭТИ ДВА ОТРЕЗКА И ОПРЕДЕЛЯЮТ ПЛОСКОСТЬ ФУНКЦИИ $f(x, y)$. ЧТОБЫ ЕЁ ПРЕДСТАВИТЬ, НАДО МЫСЛЕННО НАТЯНУТЬ ПРОСТЫННУ МЕЖДУ ПРЯМЫМИ OA И OB . ТОЧКА C НА ЭТОЙ ПЛОСКОСТИ, ПРИНАДЛЕЖАЩАЯ ПАРАЛЛЕЛОГРАММУ $OACB$, ИМЕЕТ ВЫСОТУ $ax + by$.

ЧТОБЫ ПОЛУЧИТЬ ГРАФИК
С УЧЁТОМ КОНСТАНТЫ
(СООТВЕТСТВУЮЩИЙ
ФУНКЦИИ $z = ax + by + c$),
НАДО ПРОСТО ПОДНЯТЬ
ПЛОСКОСТЬ НА ВЕЛИЧИНУ c .
ТОЧКА O НА НАШЕЙ
ПЛОСКОСТИ ТЕПЕРЬ
В $(0, 0, c)$, ТОЧКА A ИМЕЕТ
ВЫСОТУ $(ax + c)$, И ТАК
ДАЛЕЕ.



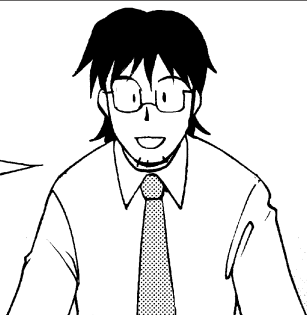






6.3. ЧАСТНЫЕ ПРОИЗВОДНЫЕ

ИТАК, ЗВОНОК!
НАЧАЛСЯ ПЕРВЫЙ
УРОК! БУДЕМ ДИФ-
ФЕРЕНЦИРОВАТЬ
ФУНКЦИЮ ДВУХ
ПЕРЕМЕННЫХ.

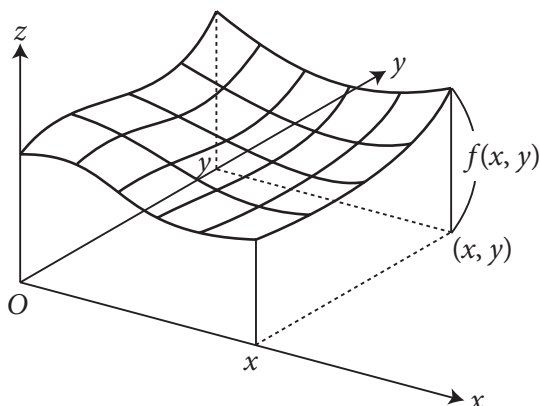


ДИНЬ-ДОН
ДИНЬ-ДОН

Расписание занятий

1	Частные производные
2	
3	

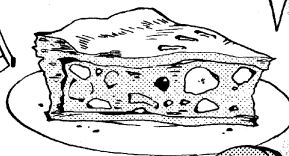
МЫ УЗНАЛИ, ЧТО ЛИНЕЙНАЯ
ФУНКЦИЯ ДВУХ ПЕРЕМЕННЫХ
ЯВЛЯЕТСЯ ПЛОСКОСТЬЮ,
ТЕПЕРЬ РАССМОТРИМ БОЛЕЕ
СЛОЖНЫЕ ФУНКЦИИ ДВУХ
ПЕРЕМЕННЫХ.



НАША ИСХОДНАЯ
ФУНКЦИЯ ПОХОЖА
НА ТЕНТ С ПЛОСКИМ
ВЕРХОМ, ТАК?



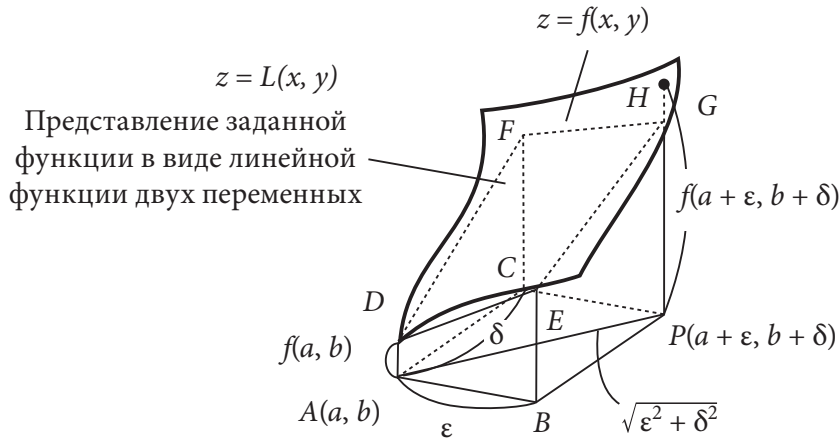
МНЕ ОНА
БОЛЬШЕ
НАПОМИНАЕТ
ПЫРОГ.



ЧТО Ж, ЭТО
НЕ СУЩЕСТВЕННАЯ РАЗНИЦА.
БУДЕМ АППРОКСИМИРОВАТЬ
ИСХОДНУЮ $f(x, y)$ ЛИНЕЙНОЙ
ФУНКЦИЕЙ ДВУХ ПЕРЕМЕННЫХ
ВЕЛИЧИ ТОЧКИ (a, b)
 $(x = a \text{ и } y = b)$.



Строим линейную функцию двух переменных, которая в точке (a, b) имеет высоту $f(a, b)$ и описывается формулой $L(x, y) = p(x - a) + q(y - b) + f(a, b)$. Заменяя x на a и y на b , получаем $L(a, b) = f(a, b)$.



Значения функций $z = f(x, y)$ и аппроксимирующей её $z = L(x, y)$ в точке $P(a + \varepsilon, b + \delta)$, смещённой относительно точки $A(a, b)$, отличается на некоторую величину. Возникающая при этом погрешность равна:

$$f(a + \varepsilon, b + \delta) - L(a + \varepsilon, b + \delta) = f(a + \varepsilon, b + \delta) - f(a, b) - (p\varepsilon + q\delta),$$

а относительная погрешность (ОП) — отношению погрешности к длине AP :

$$\text{ОП} = \frac{f(a + \varepsilon, b + \delta) - f(a, b) - (p\varepsilon + q\delta)}{\sqrt{\varepsilon^2 + \delta^2}}. \quad (1)$$

Найдём значения p и q , исходя из того, что разность между $f(x, y)$ и $L(x, y)$ стремится к нулю при приближении точки P к точке A . На графике коэффициент p равен тангенсу угла наклона DE , а коэффициент q — тангенсу угла наклона DF . Так как значения ε и δ могут быть любыми, приравняем $\delta = 0$ и найдём значение выражения (1):

$$\begin{aligned} \text{ОП} &= \frac{f(a + \varepsilon, b + 0) - f(a, b) - (p\varepsilon + q \times 0)}{\sqrt{\varepsilon^2 + 0^2}} = \\ &= \frac{f(a + \varepsilon, b) - f(a, b)}{\varepsilon} - p. \end{aligned}$$

Утверждение «относительная погрешность $\rightarrow 0$ при $\varepsilon \rightarrow 0$ » означает следующее:

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{f(a + \varepsilon, b) - f(a, b)}{\varepsilon} = p, \quad (2)$$

где p — тангенс угла наклона DE .

Заметим, что левая часть уравнения (2) означает не что иное, как дифференцирование функции одной переменной. Другими словами, если заменить y на постоянную b , то получим функцию $f(x, b)$ только переменной x . Левая часть уравнения (2) представляет расчёт производной этой функции при $x = a$.

Если записать найденное значение, используя стандартное обозначение $f'(a, b)$, то будет невозможно определить, относительно чего, x или y , мы дифференцируем. Поэтому для записи производной $f(x, y)$ при $x = a$ и фиксированном значении $y = b$ используют обозначение $f_x(a, b)$. Функция f_x называется *частной производной f по x* . Эта запись соответствует «штриху» в дифференцировании функции одной переменной. Также используется обозначение $\frac{\partial f}{\partial x}(a, b)$ вместо записи $\frac{df}{dx}$, используемой при записи производной одной переменной.

Подведём итог.

Производная f по x при $x = a$ и фиксированном значении $y = b$, может быть записана разными способами:

$$f_x(a, b); \frac{\partial f}{\partial x}(a, b); \left[\frac{\partial f}{\partial x} \right]_{x=a, y=b}; \text{наклон } DE.$$

Аналогично для y — производная f по y при $y = b$ и фиксированном значении $x = a$ записывается:

$$f_y(a, b); \frac{\partial f}{\partial y}(a, b); \left[\frac{\partial f}{\partial y} \right]_{x=a, y=b}; \text{наклон } DF.$$

∂ ЧИТАЕТСЯ КАК «ЧАСТНАЯ
ПРОИЗВОДНАЯ».



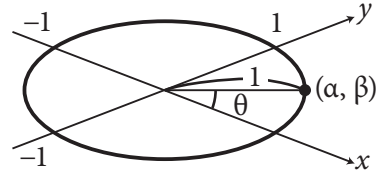
Итак, мы нашли следующее.

Если $z = f(x, y)$ имеет представление в виде линейной функции вблизи точки $(x, y) = (a, b)$, то можно записать:

$$z = f_x(a, b)(x - a) + f_y(a, b)(y - b) + f(a, b) \quad (3)$$

или $z = \frac{\partial f}{\partial x}(a, b)(x - a) + \frac{\partial f}{\partial y}(a, b)(y - b) + f(a, b).$

Рассмотрим теперь произвольную точку (α, β) на круге с радиусом 1 и центром в начале координат плоскости $x-y$ (пол). Имеем $\alpha^2 + \beta^2 = 1$ (или $\alpha = \cos \theta$ и $\beta = \sin \theta$). Найдём производную в направлении из точки $(0, 0)$ в точку (α, β) . Перемещение на расстояние t в этом направлении записывается как $(a, b) \rightarrow (a + \alpha t, b + \beta t)$. Если мы положим $\varepsilon = \alpha t$ и $\delta = \beta t$ в (1), то получим



$$\begin{aligned} \text{ОП} &= \frac{f(a + \alpha t, b + \beta t) - f(a, b) - (p\alpha t + q\beta t)}{\sqrt{\alpha^2 t^2 + \beta^2 t^2}} = \\ &= \frac{f(a + \alpha t, b + \beta t) - f(a, b)}{t \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}} - p\alpha - q\beta = (\text{учитывая, что } \alpha^2 + \beta^2 = 1) = \\ &= \frac{f(a + \alpha t, b + \beta t) - f(a, b)}{t} - p\alpha - q\beta. \end{aligned} \quad (4)$$

Прибавляя и вычитая в формуле (4) вспомогательное слагаемое, а также делая замену $p = f_x(a, b)$ и $q = f_y(a, b)$, получаем:

$$\text{ОП} = \frac{f(a + \alpha t, b + \beta t) - f(a, b + \beta t)}{t} + \frac{f(a, b + \beta t) - f(a, b)}{t} - f_x(a, b)\alpha - f_y(a, b)\beta \quad (5)$$

Используя производную по x функции $f(x, b + \beta t)$ для линейного приближения в точке $x = a$, можно записать, что

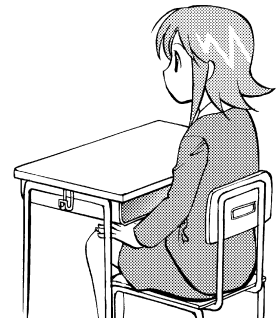
$$f(a + \alpha t, b + \beta t) - f(a, b + \beta t) \approx f_x(a, b + \beta t)\alpha t.$$

Аналогично для y получим

$$f(a, b + \beta t) - f(a, b) \approx f_y(a, b)\beta t.$$

Подставляем эти два приближения в формулу (5):

$$\begin{aligned} \text{ОП} &\approx f_x(a, b + \beta t)\alpha + f_y(a, b)\beta - f_x(a, b)\alpha - f_y(a, b)\beta = \\ &= (f_x(a, b + \beta t) - f_x(a, b))\alpha. \end{aligned}$$



Так как $f_x(a, b + \beta t) - f_x(a, b) \approx 0$, если t достаточно близко к 0, то и выражение (5), представляющее относительную погрешность, тоже близко к 0. Таким образом, мы показали, что относительная погрешность $\rightarrow 0$ при $AP \rightarrow 0$ для любого направления AP .

Надо отметить, что f_x должна быть гладкой (без изломов), чтобы можно было утверждать, что $f_x(a, b + \beta t) - f_x(a, b) \approx 0$ (при $t \approx 0$). При наличии изломов нельзя сказать, существует ли производная в любом направлении, даже если существуют производные f_x и f_y . Так как функции с изломами (кусочно-непрерывные) — явление довольно редкое, мы не будем рассматривать их в этой книге.

Пример 1

Рассмотрим функцию, приведённую в качестве примера 1 на стр. 181.

Найдём частную производную функции $h(v, t) = vt - 4,9t^2$ в точке $(v, t) = (100, 5)$.

Дифференцируя $h(v, 5) = 5v - 122,5$ в направлении v , получаем:

$$\frac{\partial h}{\partial v}(v, 5) = 5.$$

Таким образом,

$$\frac{\partial h}{\partial v}(100, 5) = h_v(100, 5) = 5.$$

Теперь дифференцируем $h(100, t) = 100t - 4,9t^2$ в направлении t и получаем:

$$\frac{\partial h}{\partial t}(100, t) = 100 - 9,8t.$$

Тогда

$$\frac{\partial h}{\partial t}(100, 5) = h_t(100, 5) = 100 - 9,8 \times 5 = 51.$$

В итоге получаем представление $h(v, t)$ в виде линейной функции

$$L(x, y) = 5(v - 100) + 51(t - 5) - 377,5.$$

Для произвольных значений h и t частные производные будут равны:

$$\frac{\partial h}{\partial v} = t,$$

$$\frac{\partial h}{\partial t} = v - 9,8t.$$

Если теперь подставить эти частные производные в уравнение (3) на стр. 192, то вблизи точки $(v, t) = (v_0, t_0)$ можно записать:

$$h(v, t) \approx t_0(v - v_0) + (v_0 - 9,8t_0)(t - t_0) + h(v_0, t_0).$$



Пример 2

В этом примере найдём линейное приближение для концентрации сахарного сиропа, полученного из y граммов сахара и x граммов воды.

$$f(x, y) = \frac{100y}{x + y}.$$

Дифференцируя по ∂x и ∂y , получаем:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = f_x = -\frac{100y}{(x + y)^2};$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = f_y = \frac{100(x + y) - 100y \times 1}{(x + y)^2} = \frac{100x}{(x + y)^2}.$$

Таким образом, вблизи точки $(x, y) = (a, b)$ имеем

$$f(x, y) \approx -\frac{100b}{(a + b)^2} (x - a) + \frac{100a}{(a + b)^2} (y - b) + \frac{100b}{a + b}.$$

Частное дифференцирование

Если $z = f(x, y)$ дифференцируема по x в любой точке пространства (x, y) , то функция $f(x, y) \rightarrow f_x(x, y)$, связывающая точку (x, y) с её частной производной $f_x(x, y)$ по x в этой точке, называется *функцией частной производной по x* от функции $z = f(x, y)$ и обозначается

$$f_x, f_x(x, y), \frac{\partial f}{\partial x} \text{ или } \frac{\partial z}{\partial x}.$$

Аналогично, если $z = f(x, y)$ дифференцируема по y в любой точке пространства (x, y) , то функция $(x, y) \rightarrow f_y(x, y)$ называется *функцией частной производной по y* от функции $z = f(x, y)$ и обозначается

$$f_y, f_y(x, y), \frac{\partial f}{\partial y} \text{ или } \frac{\partial z}{\partial y}.$$

Нахождение частных производных функции называется её *частным дифференцированием*.

6.4. ПОЛНЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЫ



Урок
2

Полные
дифференциалы

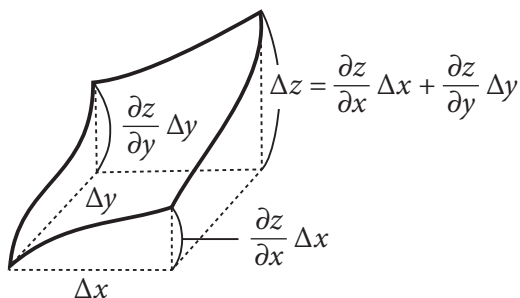
Мы нашли, что представление $z = f(x, y)$ линейной функцией в точке $(x, y) = (a, b)$ имеет вид

$$f(x, y) \approx f_x(a, b)(x - a) + f_y(a, b)(y - b) + f(a, b).$$

Перепишем это как

$$f(x, y) - f(a, b) \approx \frac{\partial f}{\partial x}(a, b)(x - a) + \frac{\partial f}{\partial y}(a, b)(y - b). \quad (6)$$

Так как разность $f(x, y) - f(a, b)$ означает приращение $z = f(x, y)$ при переходе от точки (a, b) к точке (x, y) , запишем её как Δz , как мы делали это для функции одной переменной. Соответственно, $(x - a) = \Delta x$ и $(y - b) = \Delta y$. Тогда выражение (6) можно записать в виде



$$\Delta z \approx \frac{\partial z}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial z}{\partial y} \Delta y. \quad (7)$$

Это выражение означает: если x увеличивается относительно a на Δx , а y — относительно b на Δy , то $z = f(x, y)$ увеличивается на

$$\frac{\partial z}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial z}{\partial y} \Delta y.$$

Так как $\frac{\partial z}{\partial x} \Delta x$ — это приращение z по x при $y = b$, а $\frac{\partial z}{\partial y} \Delta y$ — приращение z по y при $x = a$, то выражение (7) означает общее приращение $z = f(x, y)$ — сумму приращений по x и по y .

При стремлении приращений по x и y к нулю заменяем Δ на d и получаем следующую запись выражения (7):

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy \quad (8)$$

или $df(x, y) = f_x dx + f_y dy. \quad (9)$

ВЫРАЖЕНИЯ (8) И (9) НАЗЫВАЮТСЯ
ФОРМУЛОЙ ПОЛНОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛА



Значение формулы следующее:

Приращение высоты криволинейной поверхности	=	Частная производ- ная по x	×	Прира- щение по x	+	Частная производ- ная по y	×	Прира- щение по y
---	---	------------------------------------	---	---------------------------	---	------------------------------------	---	---------------------------

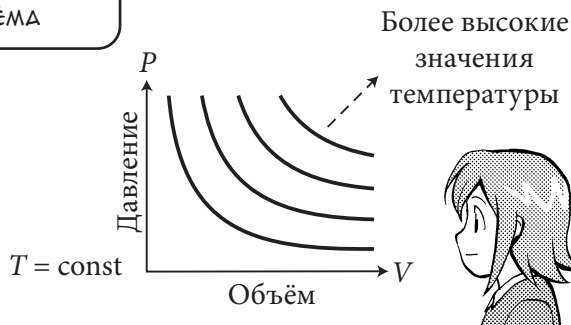
Найдём выражение полного дифференциала для функции, приведённой в качестве примера 4 на стр. 181. Для качественного анализа перепишем уравнение зависимости температуры в упрощённом виде, то есть $T = PV$. Тогда

$$\frac{\partial T}{\partial P} = \frac{\partial(PV)}{\partial P} = V \text{ и } \frac{\partial T}{\partial V} = \frac{\partial(PV)}{\partial V} = P.$$

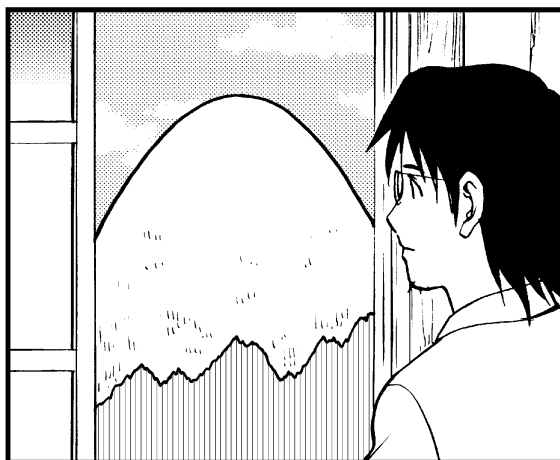
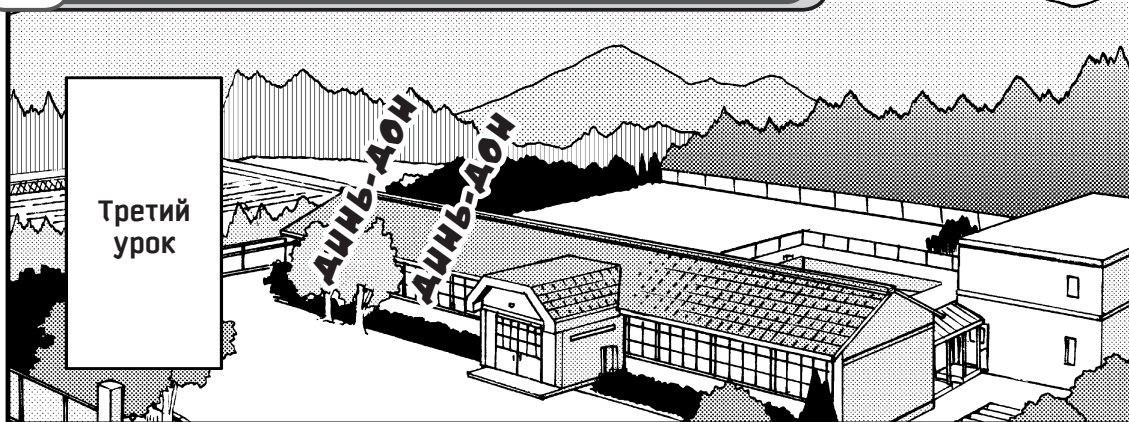
Таким образом, полный дифференциал можно записать в виде

$$dT = VdP + PdV, \text{ или в приближенной форме } \Delta T \approx V \Delta P + P \Delta V.$$

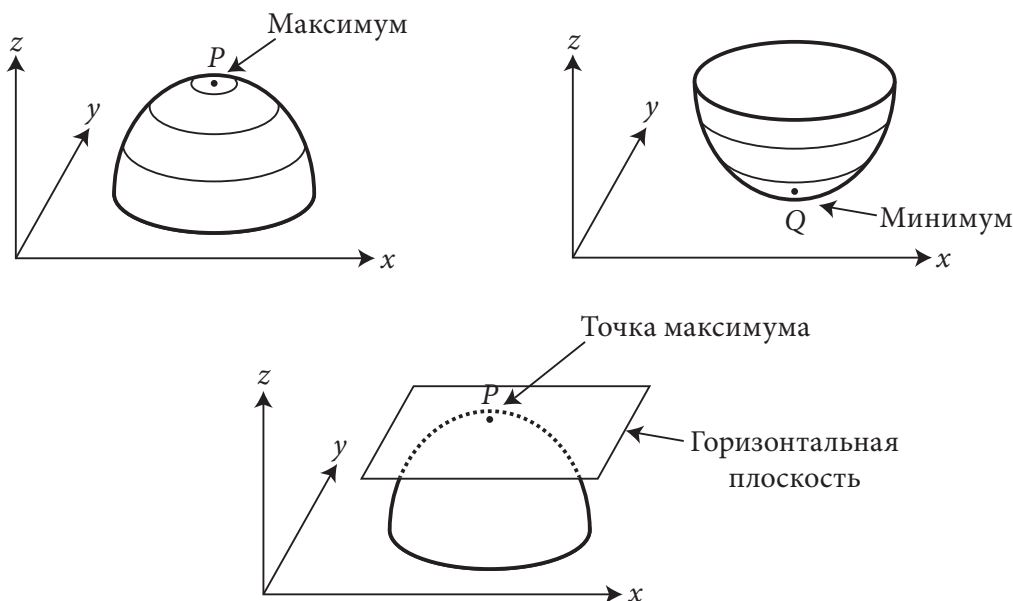
ЭТО ЗНАЧИТ, ЧТО ДЛЯ ИДЕАЛЬНОГО
ГАЗА УВЕЛИЧЕНИЕ ТЕМПЕРАТУРЫ
МОЖНО ВЫЧИСЛИТЬ ПО ФОРМУЛЕ
ОБЪЁМ × ИЗМЕНЕНИЕ ДАВЛЕНИЯ +
+ ДАВЛЕНИЕ × ИЗМЕНЕНИЕ ОБЪЁМА



6.5. УСЛОВИЯ СУЩЕСТВОВАНИЯ ЭКСТРЕМУМОВ



Экстремумы функции двух переменных $f(x, y)$ на графике находятся либо на вершине, либо на дне.



Так как касательные плоскости к графику в точках P и Q параллельны плоскости $x-y$, то они описываются линейной функцией

$$f(x, y) \approx p(x - a) + q(y - b) + f(a, b),$$

у которой $p = q = 0$.

Так как

$$p = \frac{\partial f}{\partial x} (= f_x), \quad q = \frac{\partial f}{\partial y} (= f_y),$$

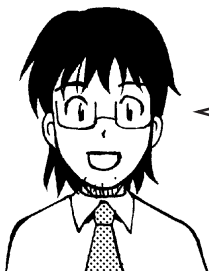
то условие существования экстремумов будет следующим*: если $f(x, y)$ имеет экстремум в точке $(x, y) = (a, b)$, то можно записать

$$f_x(a, b) = f_y(a, b) = 0$$

или

$$\frac{\partial f}{\partial x}(a, b) = \frac{\partial f}{\partial y}(a, b) = 0.$$

* Обратное неверно. То есть, даже если $f_x(a, b) = f_y(a, b) = 0$, существование экстремума в точке $(x, y) = (a, b)$ совсем не обязательно. Таким образом, это условие только возможности экстремумов.



В ТОЧКАХ ЭКСТРЕМУМОВ
ФУНКЦИИ ДВУХ ПЕРЕМЕННЫХ
ЕЁ ЧАСТНЫЕ ПРОИЗВОДНЫЕ
ПО x И ПО y РАВНЫ НУЛЮ.

Пример

Найдём минимум функции $f(x, y) = (x - y)^2 + (y - 2)^2$. Сначала найдём алгебраически.

Так как

$$(x - y)^2 \geq 0, (y - 2)^2 \geq 0,$$

то

$$f(x, y) = (x - y)^2 + (y - 2)^2 \geq 0.$$

Подставим $x = y = 2$:

$$f(2, 2) = (2 - 2)^2 + (2 - 2)^2 = 0.$$

Отсюда $f(x, y) \geq f(2, 2)$ для всех (x, y) . То есть, $f(x, y)$ имеет минимум, равный нулю, в точке $(x, y) = (2, 2)$.

С другой стороны,

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2(x - y) \text{ и } \frac{\partial f}{\partial y} = 2(x - y)(-1) + 2(y - 2) = -2x + 4y - 4.$$

Приравнявая

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial y} = 0$$

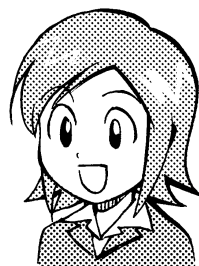
и решая полученную систему уравнений

$$\begin{cases} 2x - 2y = 0; \\ -2x + 4y - 4 = 0, \end{cases}$$

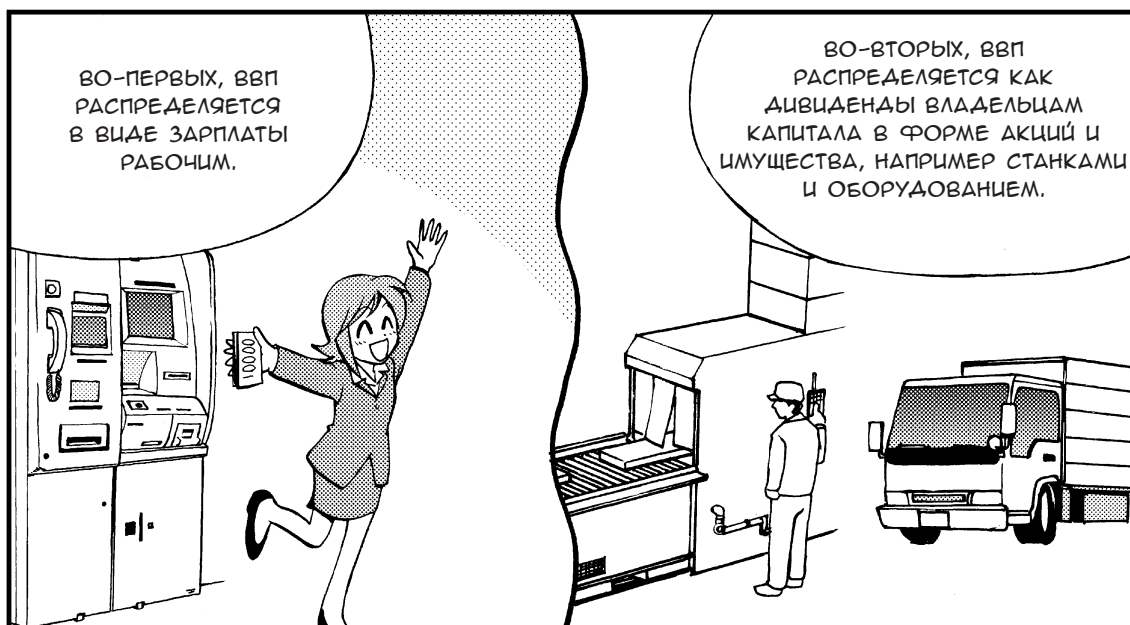
получим $(x, y) = (2, 2)$,

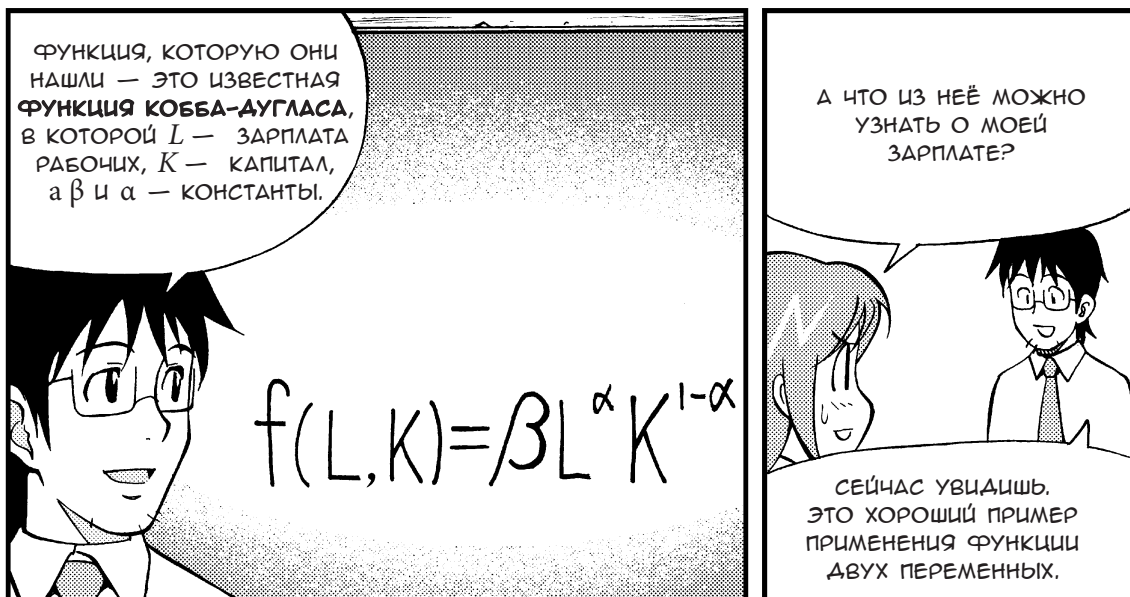
что совпадает с решением, найденным алгебраически.

РЕЗУЛЬТАТЫ ОБОИХ
РЕШЕНИЙ СОВПАЛИ!



6.6. ПРИМЕНЕНИЕ ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ В ЭКОНОМИКЕ





Пусть производство в стране задаётся функцией производства $f(L, K)$, и будем измерять зарплату в единицах w , а капитал — в единицах r . Предположим, что экономическая политика страны направлена на получение максимальной прибыли, которая задаётся функцией вида:

$$\Pi = f(L, K) - wL - rK.$$

Так как, исходя из экономической политики, значения L и K должны соответствовать максимальной прибыли Π , то уравнение должно удовлетворять следующим условиям экстремумов:

$$\frac{\partial \Pi}{\partial L} = \frac{\partial \Pi}{\partial K} = 0,$$

$$0 = \frac{\partial \Pi}{\partial L} = \frac{\partial f}{\partial L} - \frac{\partial(wL)}{\partial L} - \frac{\partial(rK)}{\partial L} = \frac{\partial f}{\partial L} - w \Rightarrow w = \frac{\partial f}{\partial L}, \quad (1)$$

$$0 = \frac{\partial \Pi}{\partial K} = \frac{\partial f}{\partial K} - \frac{\partial(wL)}{\partial K} - \frac{\partial(rK)}{\partial K} = \frac{\partial f}{\partial K} - r \Rightarrow r = \frac{\partial f}{\partial K}. \quad (2)$$

Формулы (1) и (2) означают следующее:

Единичная зарплата = Частная производная функции производства по L ;

Единичный капитал = Частная производная функции производства по K .

Тогда выплаты, которые жители страны получают за работу, равны

$$\text{Зарплата} \times \text{Работа} = wL.$$

Если на зарплату рабочим распределяется 70% от ВВП, имеем

$$wL = 0,7f(L, K). \quad (3)$$

Аналогично, выплаты владельцам капитала составят

$$rK = 0,3f(L, K). \quad (4)$$

Из (1) и (3) следует:

$$\frac{\partial f}{\partial L} \times L = 0,7 f(L, K), \quad (5)$$

а из (2) и (4) следует:

$$\frac{\partial f}{\partial K} \times K = 0,3 f(L, K). \quad (6)$$



Кобб нашёл функцию $f(L, K)$, удовлетворяющую этим уравнениям:

$$f(L, K) = \beta L^{0,7} K^{0,3},$$

где β — положительный коэффициент, обозначающий уровень развития технологии.

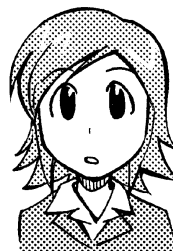
Проверим, удовлетворяет ли эта функция заданным условиям:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial L} \times L &= \frac{\partial (\beta L^{0,7} K^{0,3})}{\partial L} \times L = 0,7\beta L^{(-0,3)} K^{0,3} \times L^1 = \\ &= 0,7\beta L^{0,7} K^{0,3}. \end{aligned}$$

Аналогично

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial K} \times K &= \frac{\partial (\beta L^{0,7} K^{0,3})}{\partial K} \times K = 0,3\beta L^{0,7} K^{(-0,7)} \times K^1 = \\ &= 0,3\beta L^{0,7} K^{0,3}. \end{aligned}$$

Действительно, функция $f(L, K) = \beta L^{0,7} K^{0,3}$ удовлетворяет условиям (5) и (6).



АА, НЕЧЕГО
ВОЗРАЗИТЬ, ЭТО
ДЕЙСТВИТЕЛЬНО
ТАК.



ТАКИМ ОБРАЗОМ, ЧАСТНЫЕ
ПРОИЗВОДНЫЕ ПОЗВОЛИЛИ
НАЙТИ СКРЫТЫЙ ЗАКОН,
ОПИСЫВАЮЩИЙ ЭКОНОМИКУ
ВСЕЙ СТРАНЫ, И ВЫРАБОТАТЬ
ПРАВИЛА, ОПРЕДЕЛЯЮЩИЕ
БЛАГОСОСТОЯНИЕ СТРАНЫ.



ВЫХОДИТ, ЧТО ЧАСТНЫЕ
ПРОИЗВОДНЫЕ НЕСУТ В
СЕБЕ ОПРЕДЕЛЁННЫЙ
СМЫСЛ, НО ОН НЕ
ВСЕГДА ОЧЕВИДЕН, ТАК?

6.7. ЧАСТНАЯ ПРОИЗВОДНАЯ СЛОЖНОЙ ФУНКЦИИ. ЦЕПНОЕ ПРАВИЛО

Производную сложной функции одной переменной мы рассматривали ранее на стр. 14.

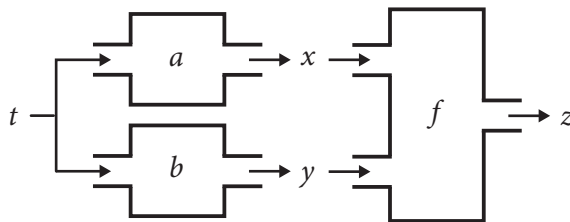
$$y = f(x), z = g(y) \rightarrow z = g(f(x)),$$

$$g(f(x))' = g'(f(x)) f'(x).$$



СЕЙЧАС МЫ ВЫВЕДЕМ ФОРМУЛУ ДЛЯ
НАХОЖДЕНИЯ ЧАСТНОЙ ПРОИЗВОДНОЙ
(ЦЕПНОЕ ПРАВИЛО) СЛОЖНОЙ ФУНКЦИИ
НЕСКОЛЬКИХ ПЕРЕМЕННЫХ.

Пусть z — функция двух переменных x и y , имеющая вид $z = f(x, y)$, а x и y — функции одной переменной t , имеющие вид $x = a(t)$ и $y = b(t)$ соответственно. Тогда z можно представить в виде функции только переменной t , как показано на диаграмме.



Эту зависимость можно записать в следующем виде:

$$z = f(x, y) = f(a(t), b(t)).$$

Найдём частную производную $\frac{dz}{dt}$ этой функции.

Пусть при $t = t_0$

$$a(t_0) = x_0, \quad b(t_0) = y_0, \quad f(x_0, y_0) = f(a(t_0)), \quad b(t_0) = z_0.$$

Будем рассматривать поведение функций вблизи точек t_0, x_0, y_0 и z_0 .

Если мы найдём значение α , удовлетворяющее уравнению

$$z - z_0 \approx \alpha \times (t - t_0), \tag{1}$$

то это и будет $\frac{dz}{dt}(t_0)$.

Сперва используем линейное приближение для $x = a(t)$ и $y = b(t)$:

$$x - x_0 \approx \frac{da}{dt}(t_0)(t - t_0); \quad (2)$$

$$y - y_0 \approx \frac{db}{dt}(t_0)(t - t_0). \quad (3)$$

Далее запишем формулу полного дифференциала функции двух переменных $f(x, y)$

$$z - z_0 \approx \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)(y - y_0). \quad (4)$$

Подставляя (2) и (3) в (4), получаем:

$$\begin{aligned} z - z_0 &\approx \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) \frac{da}{dt}(t_0)(t - t_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \frac{db}{dt}(t_0)(t - t_0) = \\ &= \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) \frac{da}{dt}(t_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \frac{db}{dt}(t_0) \right) (t - t_0). \end{aligned} \quad (5)$$

Сравнивая (1) и (5), можно записать следующее соотношение:

$$\frac{dz}{dt}(t_0) = \alpha = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) \frac{da}{dt}(t_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \frac{db}{dt}(t_0).$$

Таким образом мы получили формулу для частной производной сложной функции!

Частная производная сложной функции (цепное правило)

Если $z = f(x, y)$, $x = a(t)$, $y = b(t)$,

то

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x} \frac{da}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{db}{dt}. \quad (6.1)$$



Будем считать, что рыбный улов зависит от численности рабочих y и количества отходов фабрики b и выражается функцией двух переменных $g(y, b)$.

Увеличение отходов b вызывает снижение улова, поэтому частная производная $g(y, b)$ по b — отрицательна.

Так как численность рабочих x содержится в функции $g(y, b) = g(y, b(f(x)))$, то производственная деятельность фабрики влияет на рыболовство, хотя и не учитывается при формировании рыночной цены. Это внешнее воздействие, называемое *экстерналиями*.

Сначала посмотрим, что будет, если фабрика и рыболовство будут действовать только в целях собственной выгоды. Пусть зарплата на обоих предприятиях равна w , цена товара, произведённого на фабрике — p , а цена выловленной рыбы — q . Тогда прибыль фабрики будет задаваться формулой

$$\Pi_1(x) = pf(x) - wx. \quad (1)$$

Фабрика стремится к максимальной прибыли, отсюда условие экстремума:

$$\frac{\partial \Pi_1}{\partial x} = pf'(x) - w = 0 \Leftrightarrow pf'(x) = w. \quad (2)$$

Пусть $x = x^*$ удовлетворяет этому условию, то есть

$$pf'(x^*) = w. \quad (3)$$

Здесь x^* — оптимальное количество рабочих на фабрике, а $f(x^*)$ — количество производимых фабрикой товаров. Тогда количество отходов будет

$$b^* = b(f(x^*)).$$

Прибыль от рыболовства Π_2 задаётся формулой

$$\Pi_2 = qg(y, b^*) - wy.$$

Так как количество отходов фабрики задаётся формулой $b^* = b(f(x^*))$ и не зависит от рыболовства, то прибыль от рыболовства практически становится функцией одной переменной y :

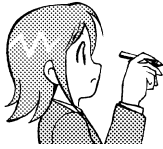
$$\Pi_2 = qg(y, b^*) - wy. \quad (4)$$

Поэтому, чтобы найти максимум Π_2 , нам достаточно выполнить только одно условие экстремума функции двух переменных — для частной производной по y :

$$\frac{\partial \Pi_2}{\partial y} = q \frac{\partial g}{\partial y}(y, b^*) - w = 0 \Leftrightarrow q \frac{\partial g}{\partial y}(y, b^*) = w. \quad (5)$$

Отсюда оптимальное количество рыбаков y^* должно удовлетворять условию:

$$q \frac{\partial g}{\partial y}(y^*, b^*) = w. \quad (6)$$



ИТАК...

Оптимальное количество товаров на фабрике и оптимальный улов рыбы, при условии их независимости друг от друга, определяются как $f(x^*)$ и $g(y^*, b^*)$ соответственно, где x^* и y^* удовлетворяют условиям (3) и (6):

$$pf'(x^*) = w, \quad b^* = b(f(x^*)), \quad q \frac{\partial g}{\partial y}(y^*, b^*) = w.$$



ТЕПЕРЬ, СЭКИ-САН, ПРОВЕРИМ, ЯВЛЯЕТСЯ ЛИ ЭТО РЕШЕНИЕ ОПТИМАЛЬНЫМ ДЛЯ ИНТЕРЕСОВ ВСЕГО ОБЩЕСТВА.

ЧТОБЫ УЧЕСТЬ ИНТЕРЕСЫ И ФАБРИКИ, И РЫБОЛОВСТВА, НУЖНО НАЙТИ УСЛОВИЕ МАКСИМУМА ДЛЯ СУММЫ ПРИБЫЛЕЙ ОТ ОБОИХ ВИДОВ ДЕЯТЕЛЬНОСТИ.

$$\Pi_3 = pf(x) + qg(y, b(f(x))) - wx - wy.$$

Так как Π_3 — функция двух переменных x и y , то условием экстремума является равенство:

$$\frac{\partial \Pi_3}{\partial x} = \frac{\partial \Pi_3}{\partial y} = 0.$$

Рассмотрим первую частную производную:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Pi_3}{\partial x} &= pf'(x) + q \frac{\partial g(y, b(f(x)))}{\partial x} - w = \\ &= pf'(x) + q \frac{\partial g}{\partial b}(y, b(f(x)))b'(f(x))f'(x) - w. \end{aligned}$$

Мы воспользовались здесь правилом дифференцирования функции от функции.

Таким образом:

$$\frac{\partial \Pi_3}{\partial x} = 0 \Leftrightarrow \left(p + q \frac{\partial g}{\partial b}(y, b(f(x)))b'(f(x)) \right) f'(x) = w. \quad (7)$$

Аналогичным образом получаем условие для второй частной производной:

$$\frac{\partial \Pi_3}{\partial y} = 0 \Leftrightarrow q \frac{\partial g}{\partial y}(y, b(f(x))) = w. \quad (8)$$

Таким образом, с точки зрения общества оптимальные количества рабочих x^{**} — для фабрики и y^{**} — для рыболовства определяются из формул:

$$\left(p + q \frac{\partial g}{\partial b}(y^{**}, b(f(x^{**}))) b'(f(x^{**})) \right) f'(x^{**}) = w, \quad (9)$$

$$q \frac{\partial g}{\partial y}(y^{**}, b(f(x^{**}))) = w. \quad (10)$$

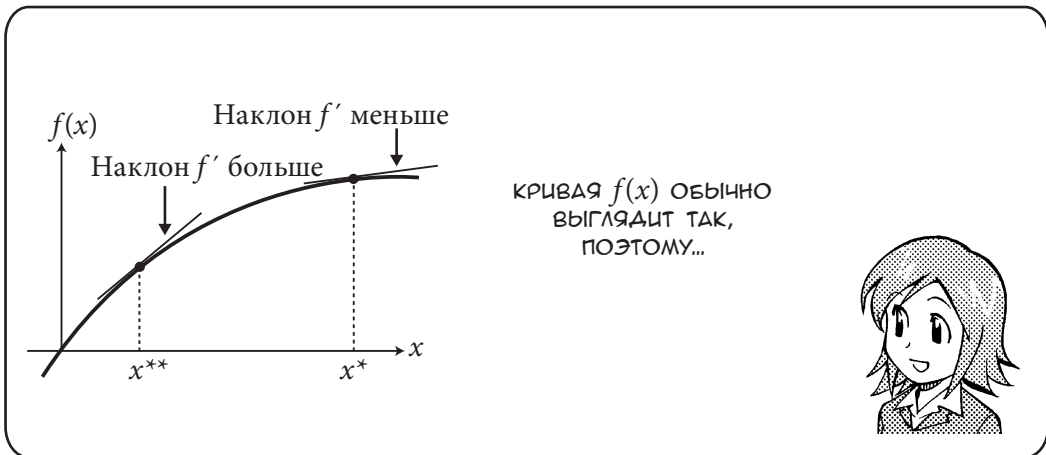
Хотя эти уравнения и выглядят громоздкими, это всего лишь система уравнений с двумя переменными. Сравнивая эти уравнения с (3) и (6), обнаруживаем, что (3) и (9) отличаются, а (6) и (10) — совпадают. Посмотрим, чем же отличаются уравнения (3) и (9):

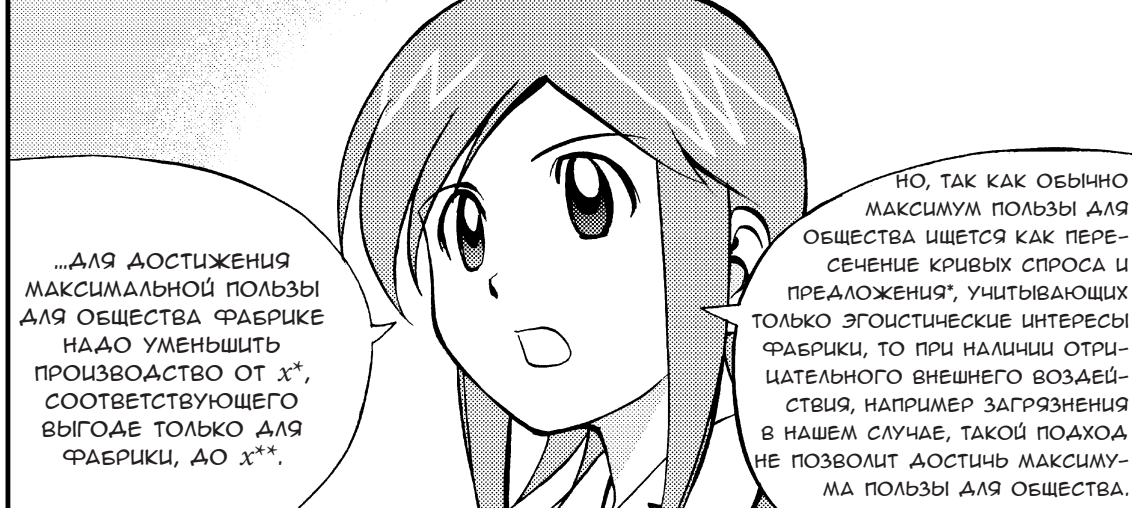
$$p \times f'(x^*) = w, \quad (3)$$

$$(p + \heartsuit) \times f'(x^{**}) = w. \quad (11)$$

В уравнении (9) мы заменили второе слагаемое на значок $\heartsuit = q \frac{\partial g}{\partial b} b'(f(x^{**}))$.

Так как \heartsuit отрицательно, то $p + \heartsuit$ меньше p , а так как правые части (3) и (11) порознь равны w , то из того, что $p + \heartsuit < p$, следует, что $f'(x^{**})$ должно быть больше $f'(x^*)$.





* Смотри стр. 105.



ЕСЛИ УСТАНОВИТЬ
ВЕЛИЧИНУ НАЛОГА
НА ЕДИНИЦУ ТОВАРА,
ПРОИЗВЕДЁННОГО
НА ФАБРИКЕ, РАВНОЙ ♥...

$$(-\heartsuit = -q \frac{\partial g}{\partial b} b'(f(x^{**})))$$

...ТО ПРИБЫЛЬ,
УЧИТЫВАЮЩАЯ ТОЛЬКО
ИНТЕРЕСЫ ФАБРИКИ,
ЗАПИШЕТСЯ СЛЕДУЮЩЕЙ
ФОРМУЛОЙ:

$$\Pi_1(x) = pf(x) - wx - (-\heartsuit f(x)) \quad (12)$$

И УСЛОВИЕ ЭКСТРЕМУМА
ДЛЯ ЭТОЙ ФОРМУЛЫ
БУДЕТ СЛЕДУЮЩИМ:

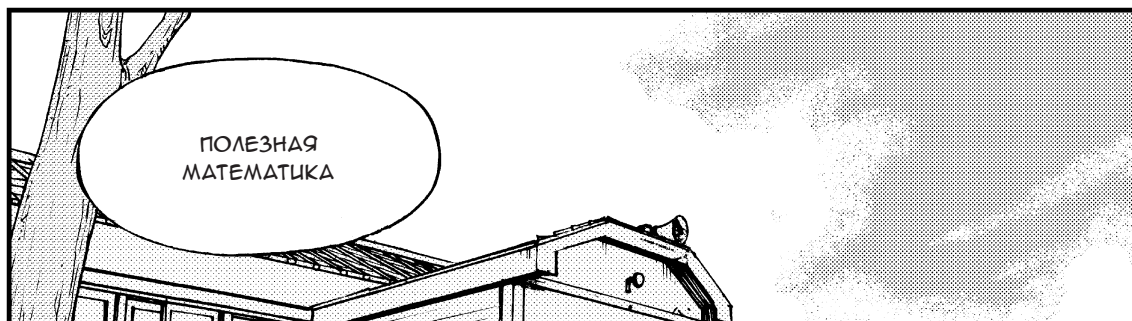
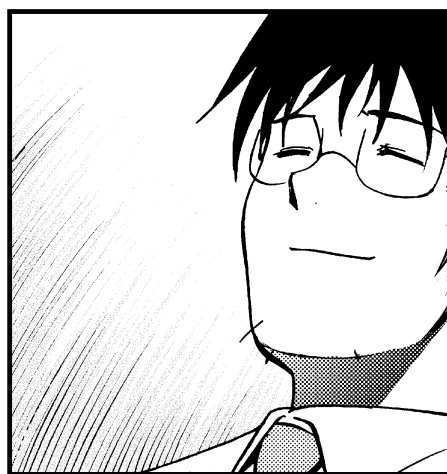
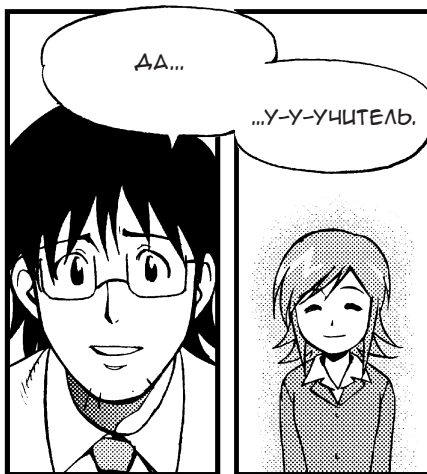
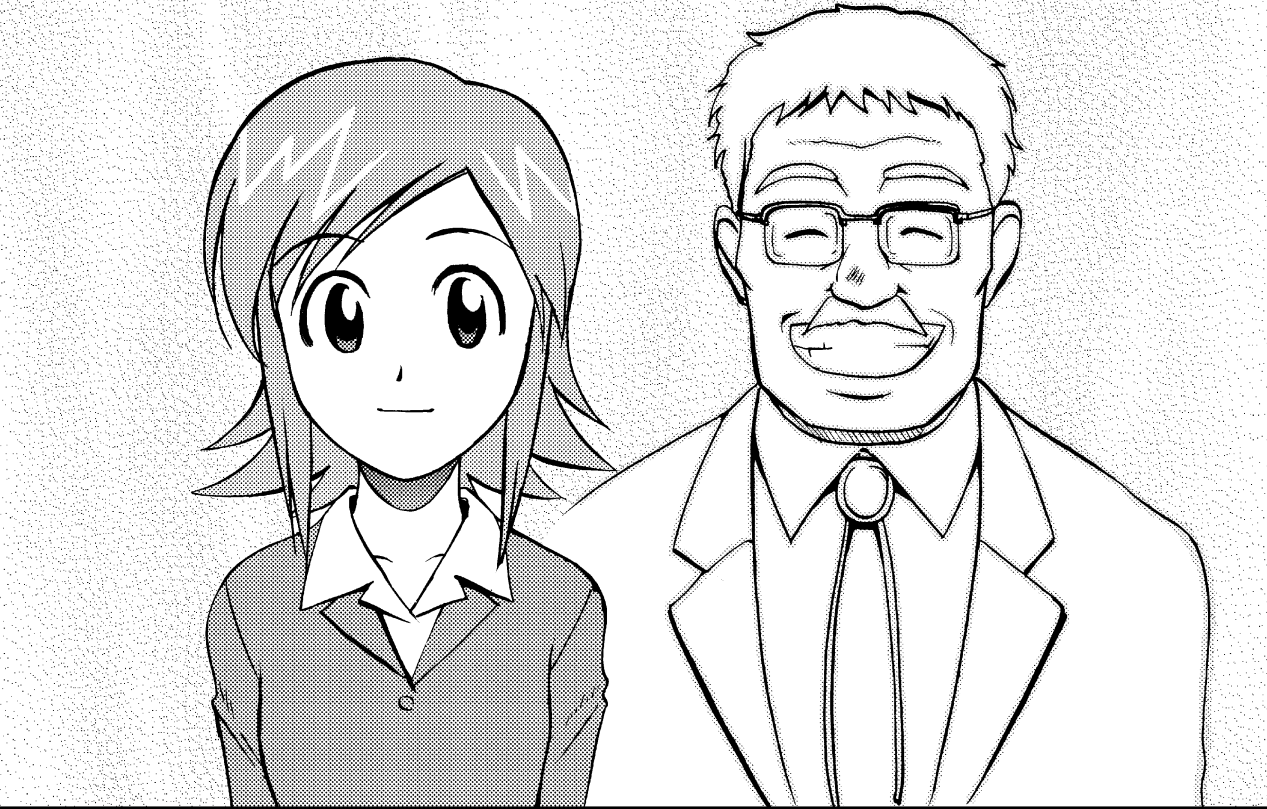
$$\frac{\partial \Pi_1}{\partial x} = pf'(x) - w + \heartsuit f'(x) = 0 \Leftrightarrow (p + \heartsuit)f'(x) = w \quad (13)$$

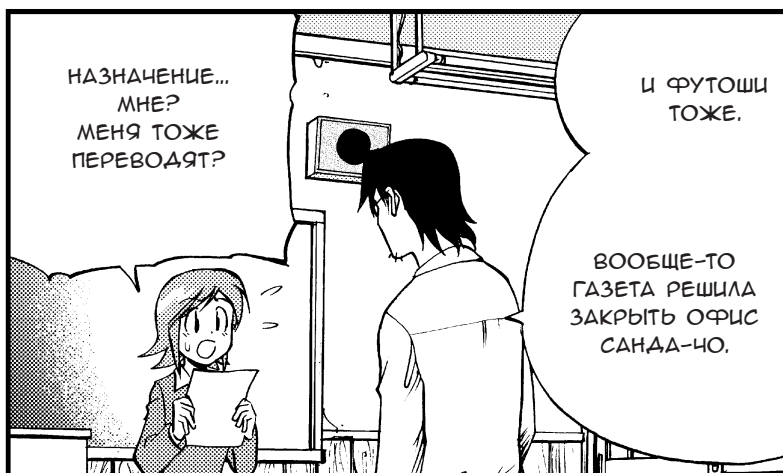
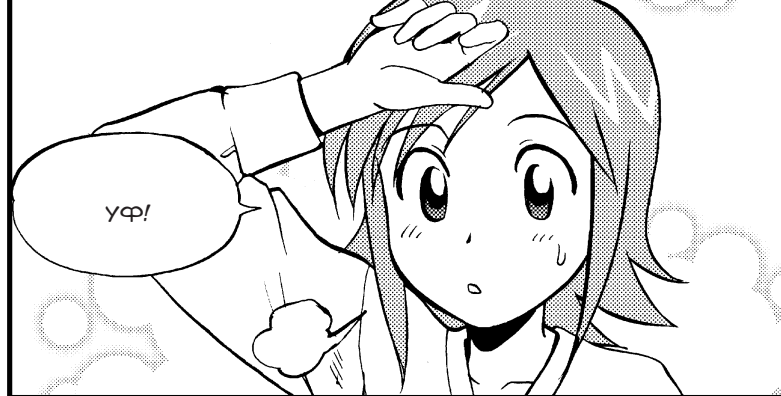
ТАК КАК УРАВНЕНИЕ (13) СОВПАДАЕТ
С УРАВНЕНИЕМ (9), ТО ТЕПЕРЬ
ПЕРЕСЕЧЕНИЕ КРИВЫХ СПРОСА И
ПРЕДЛОЖЕНИЯ БУДЕТ СООТВЕТСТВОВАТЬ
МАКСИМУМУ ПОЛЬЗЫ ДЛЯ ОБЩЕСТВА.

ОБЫЧНЫЕ НАЛОГИ
(ПОДОХОДНЫЙ,
ПОТРЕБИТЕЛЬСКИЙ)
СЛУЖАТ ДЛЯ
ГОСУДАРСТВЕННЫХ
ИНВЕСТИЦИЙ...

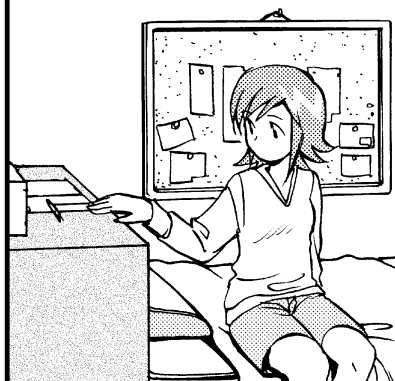
...В ТО ВРЕМЯ КАК
ЭКОЛОГИЧЕСКИЙ
НАЛОГ ИСПОЛЬЗУЕТСЯ
ДЛЯ ПОДДЕРЖАНИЯ
ЭКОЛОГИЧЕСКИ
ЧИСТОЙ СРЕДЫ ПУТЁМ
КОНТРОЛЯ
ЗА ЭКОНОМИКОЙ.

ВАМ ВСЁ
ПОНЯТНО,
СЭКИ-САН?



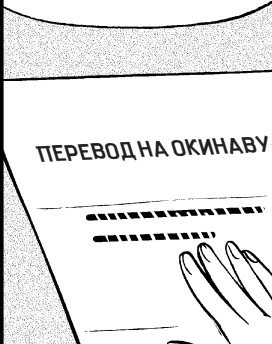


ПОСМОТРИ, КУДА
ТЕБЯ ПЕРЕВОДЯТ.

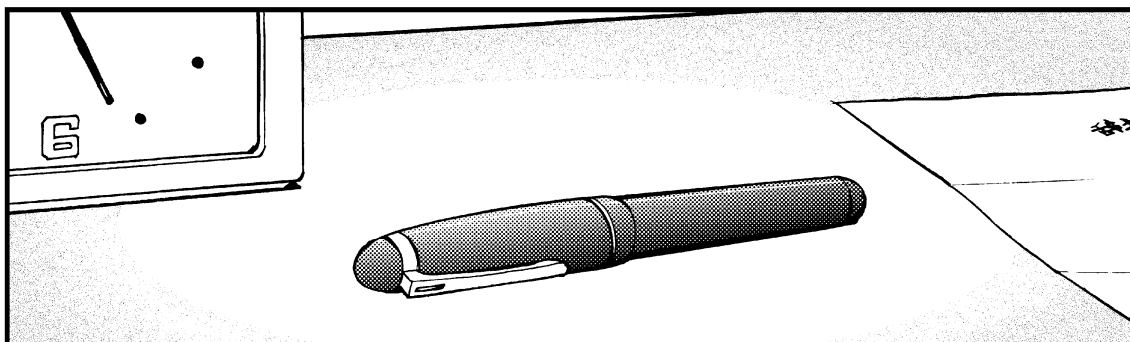
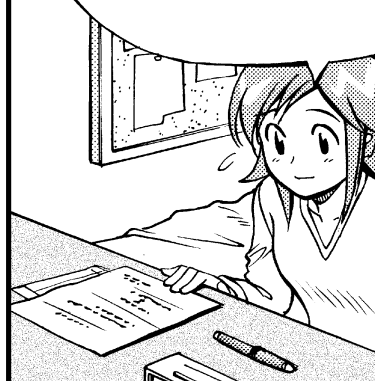


ПОДУМАТЬ
ТОЛЬКО —
Я БУДУ
РАБОТАТЬ
НА ОКНАВЕ.

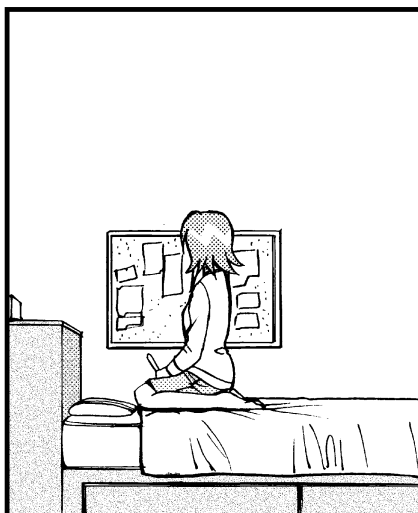
ПЕРЕВОД НА ОКНАВУ



Я ДАЖЕ
НЕ ЗНАЛА, ЧТО
НАША КОМПАНИЯ
ИМЕЕТ ОФИС
НА ОКНАВЕ.



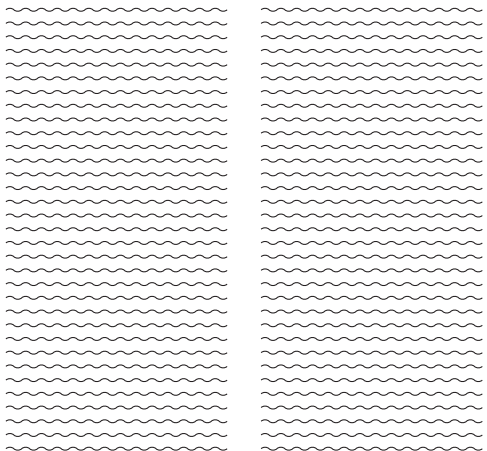
ЭТО МОЙ ПОДАРОК
ТЕБЕ НА ПАМЯТЬ. ПУСТЬ
ОНА ПИШЕТ ТОЛЬКО
ХОРОШИЕ СТАТЬИ.



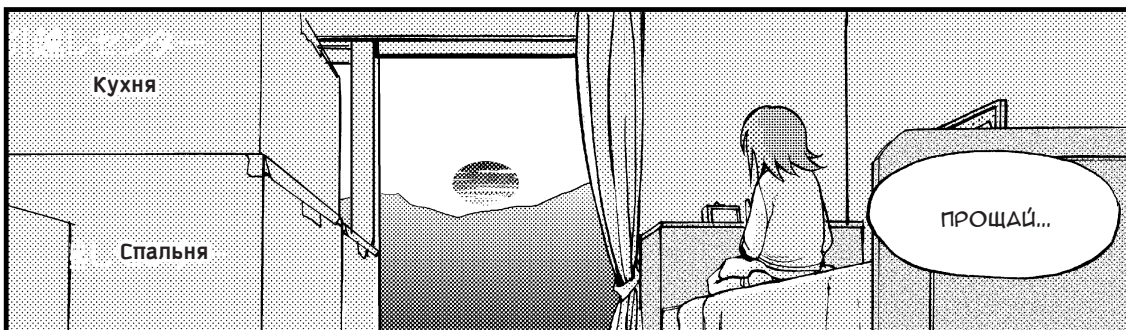
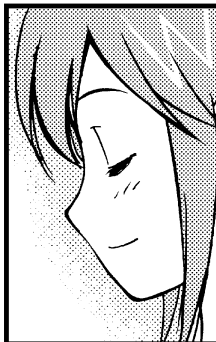
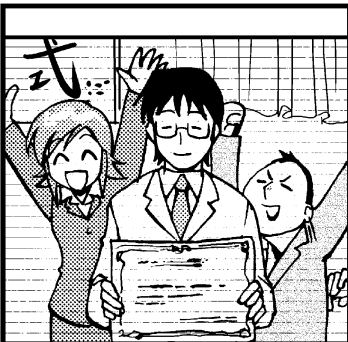
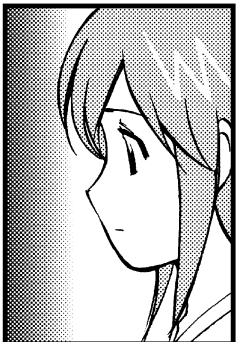
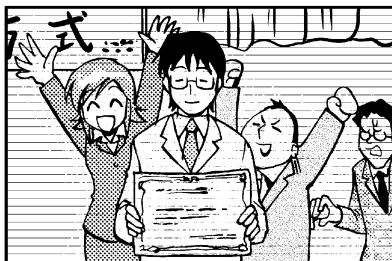
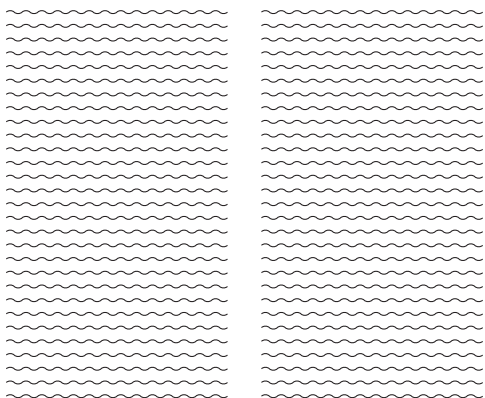
Рубрика «Окружающая среда и экономика»

**Компания «БЕРНЕМ КЕМИКЛ»
приносит свои извинения
в связи с загрязнением залива
отходами химического производства**

Компания готова урегулировать конфликт
с рыболовным кооперативом



Рубрика «Окружающая среда и экономика»



Производная неявно заданной функции

Множество точек (x, y) , в которых функция двух переменных $f(x, y)$ равна константе c , образуют график, удовлетворяющий условию $f(x, y) = c$. Если часть этого графика имеет вид функции одной переменной $y = h(x)$, то такая функция называется *неявно заданной функцией*, или *неявной функцией*. Неявная функция $h(x)$ удовлетворяет равенству $f(x, h(x)) = c$ для всех x в области определения. Найдём производную неявной функции $h(x)$.

Полный дифференциал функции $z = f(x, y)$ записывается как $dz = f_x dx + f_y dy$. Если точка (x, y) перемещается по поверхности $f(x, y) = c$, то значение функции $f(x, y)$ не меняется, а значит и дифференциал dz тоже равен 0. Получаем $0 = f_x dx + f_y dy$. Считая, что $f_y \neq 0$, преобразуем это выражение к следующему виду:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{f_x}{f_y}.$$

Левая часть этого уравнения не что иное, как производная $h(x)$. Получаем:

$$h'(x) = -\frac{f_x}{f_y}.$$

Пример

График функции $f(x, y) = x^2 + y^2 = r^2$ представляет собой окружность радиусом r с центром в начале координат. Считая, что $x^2 \neq r^2$, используем неявную функцию $f(x, y) = x^2 + y^2 = r^2$, чтобы найти производную явных функций $y = h(x) = \sqrt{r^2 - x^2}$ и $y = h(x) = -\sqrt{r^2 - x^2}$. Используя формулу производной неявной функции получаем:

$$h'(x) = -\frac{f_x}{f_y} = -\frac{x}{y}.$$

6.8. УПРАЖНЕНИЯ К ГЛАВЕ 6

1. Найти f_x и f_y для $f(x, y) = x^2 + 2xy + 3y^2$.
2. Период колебаний T маятника длиной L под действием ускорения силы тяжести g задаётся формулой

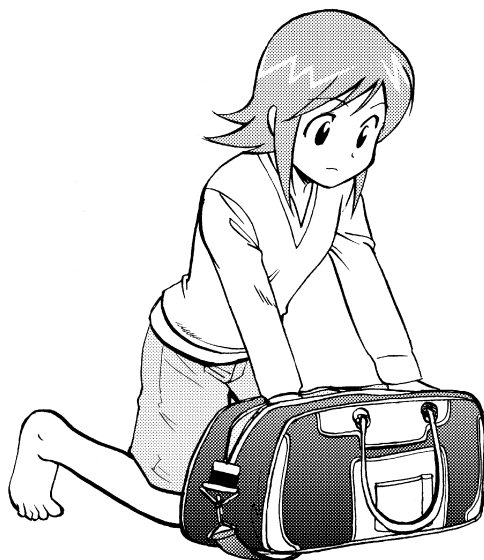
$$T = 2\pi \sqrt{\frac{L}{g}}.$$

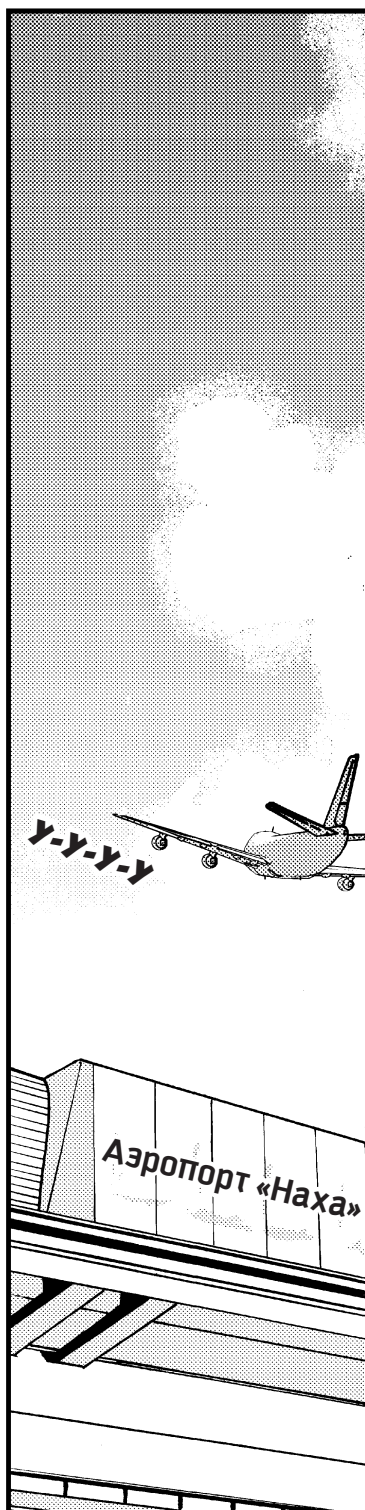
Ускорение g зависит от высоты над уровнем моря.

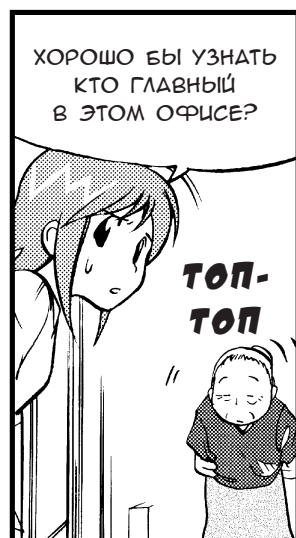
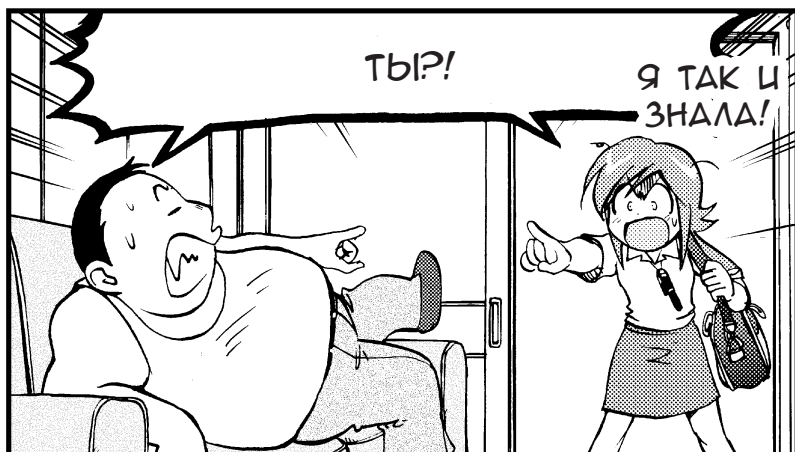
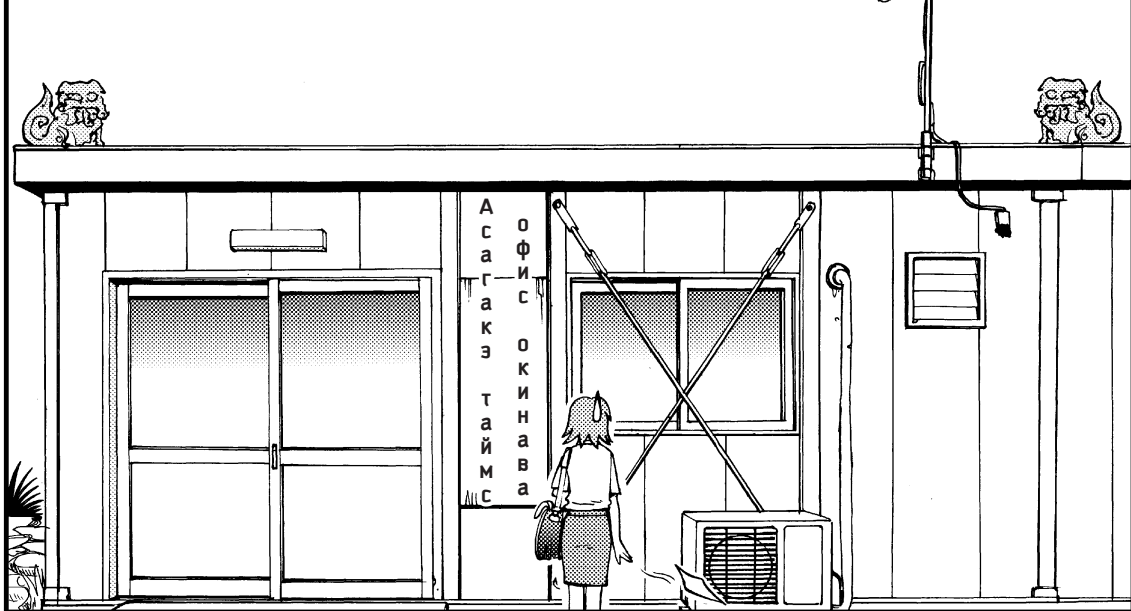
- а) Найти выражение для полного дифференциала T .
 - б) Если L удлинить на 1 процент, g уменьшить на 2 процента, на сколько процентов увеличится T ?
3. Вывести формулу производной $h(x)$ неявной функции $f(x, y) = c$, используя правило дифференцирования функции от функции.

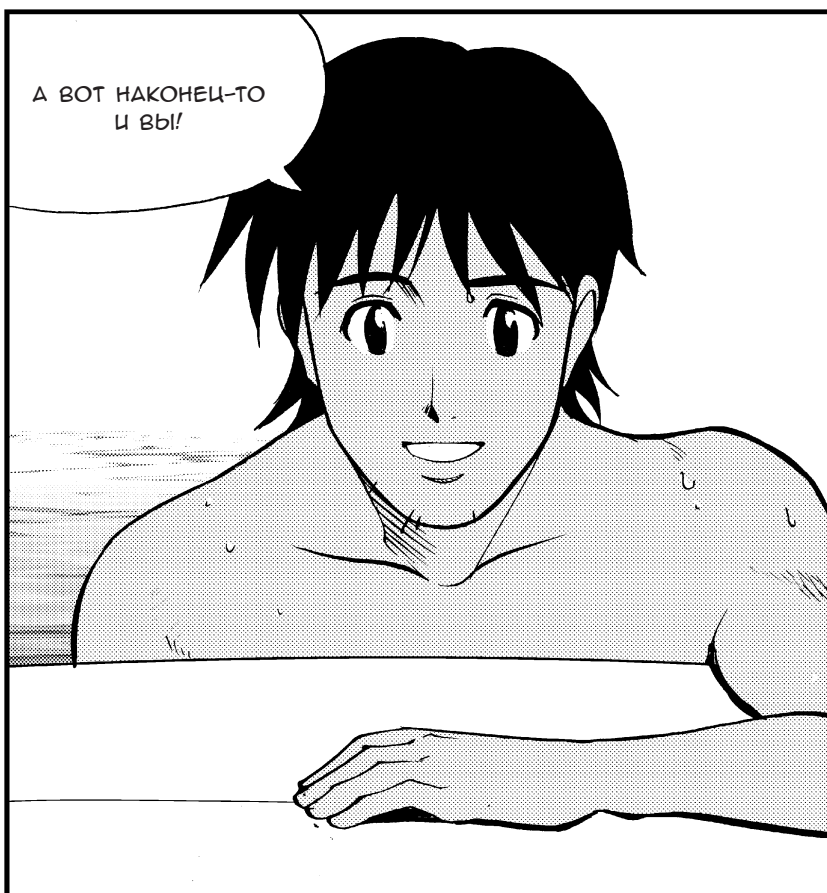
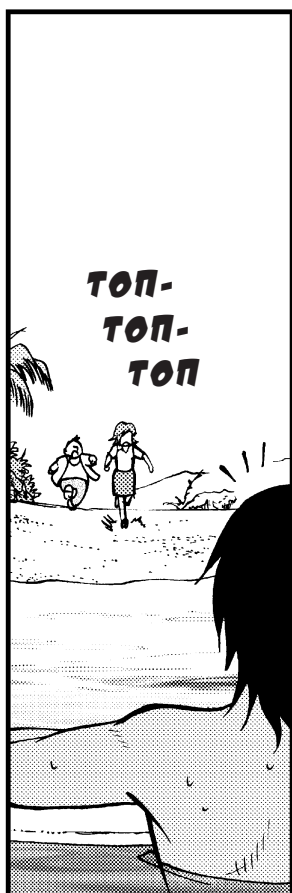
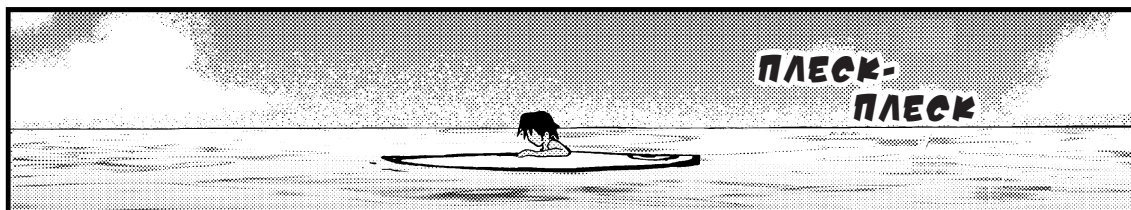
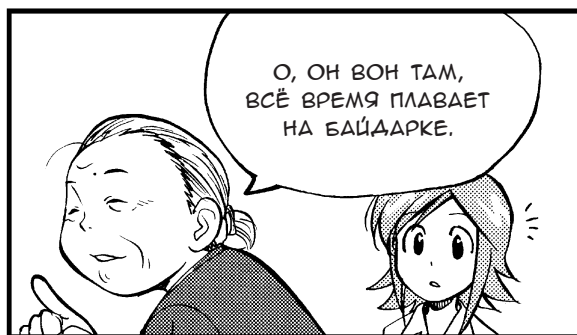
ЭПИЛОГ

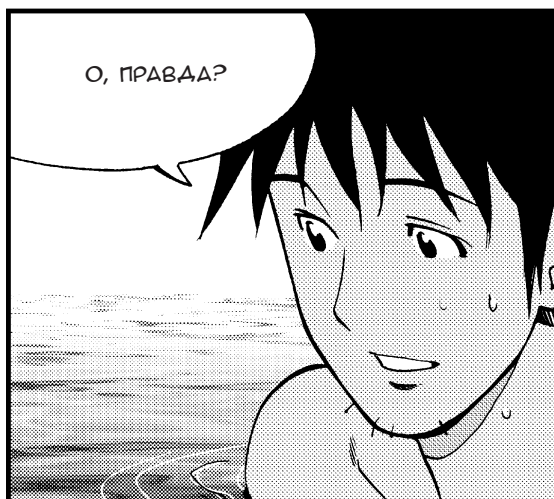
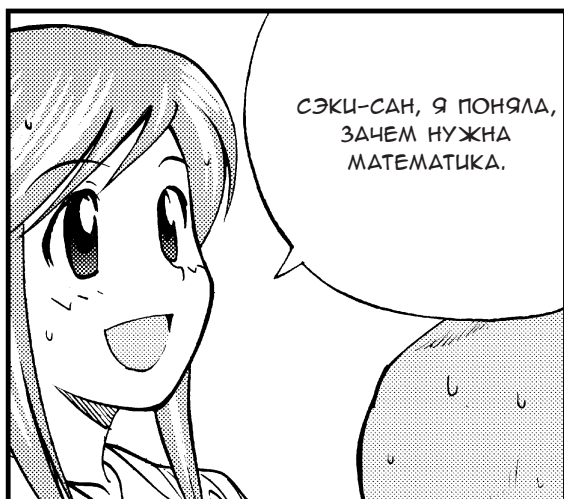
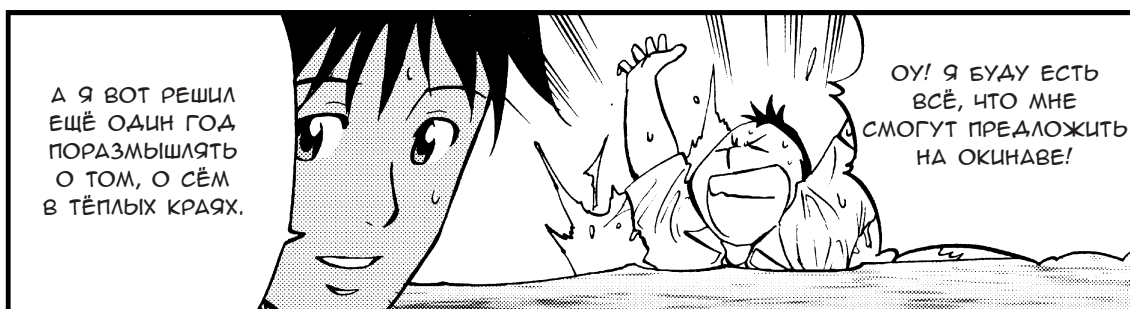
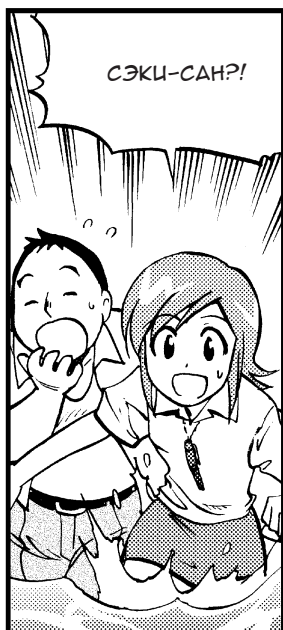
ЗАЧЕМ НУЖНА МАТЕМАТИКА?

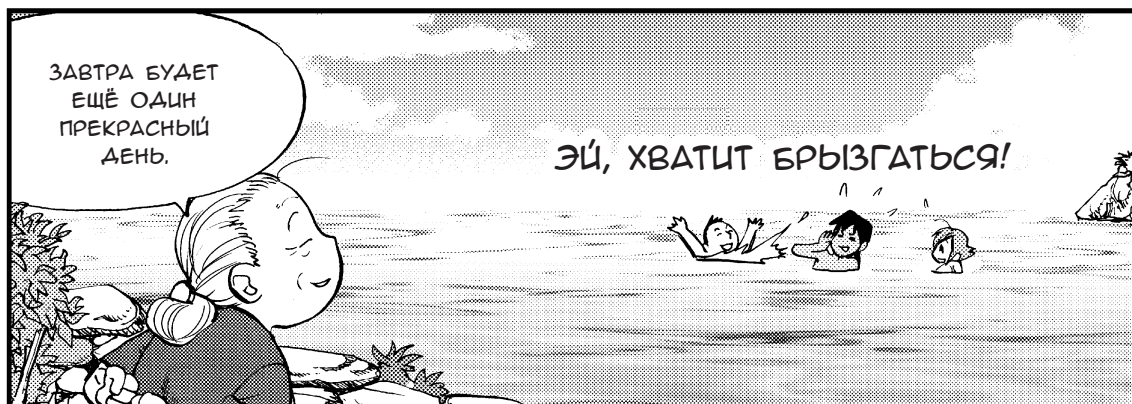














ПРИЛОЖЕНИЯ

П.1. РЕШЕНИЯ К УПРАЖНЕНИЯМ

Пролог

1.

Подставляя $y = \frac{5}{9}(x - 32)$ в $z = 7y - 30$, получаем $z = \frac{35}{9}(x - 32) - 30$.

Глава 1

1.

$$1) f(5) = g(5) = 50, \quad 2) f'(5) = 8.$$

2.

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{f(a + \varepsilon) - f(a)}{\varepsilon} &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{(a + \varepsilon)^3 - a^3}{\varepsilon} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{3a^2\varepsilon + 3a\varepsilon^2 + \varepsilon^3}{\varepsilon} \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} (3a^2 + 3a\varepsilon + \varepsilon^2) = 3a^2. \end{aligned}$$

Таким образом, производная от $f(x)$ — это $f'(x) = 3x^2$

Глава 2

1.

$$f'(x) = -\frac{(x^n)'}{(x^n)^2} = -\frac{nx^{n-1}}{x^{2n}} = -\frac{n}{x^{n+1}}.$$

2.

$$f'(x) = 3x^2 - 12 = 3(x - 2)(x + 2).$$

$f'(x) > 0$ при $x < -2$, $f'(x) < 0$ при $-2 < x < 2$ и $f'(x) > 0$ при $x > 2$. То есть при $x = -2$ имеем максимум $f(-2) = 16$, а при $x = 2$ имеем максимум $f(2) = -16$.

Так как $f(x) = (1 - x)^3$ — функция $g(h(x))$, состоящая из $g(x) = x^3$ и $h(x) = 1 - x$, то $f'(x) = g'(h(x))h'(x) = 3(1 - x)^2(-1) = -3(1 - x)^2$.

3.

Находим производную функции $g(x) = x^2(1 - x)^3$:

$$\begin{aligned} g'(x) &= (x^2)'(1 - x)^3 + x^2((1 - x)^3)' = 2x(1 - x)^3 + x^2(-3(1 - x)^2) = \\ &= x(1 - x)^2(2(1 - x) - 3x) = x(1 - x)^2(2 - 5x). \end{aligned}$$

$$g'(x) = 0 \text{ при } x = \frac{2}{5} \text{ и } x = 1.$$

Так как $g(1) = 0$, то максимум достигается в точке

$$x = \frac{2}{5} \text{ и равен } g\left(\frac{2}{5}\right) = \frac{108}{3125}.$$

Глава 3

1.

$$1) \int_1^3 3x^2 dx = x^3 \Big|_1^3 = 3^3 - 1^3 = 26.$$

$$2) \int_2^4 \frac{x^3 + 1}{x^2} dx = \int_2^4 \left(x + \frac{1}{x^2} \right) dx = \int_2^4 x dx + \int_2^4 \frac{1}{x^2} dx = \frac{1}{2} (4^2 - 2^2) - \left(\frac{1}{4} - \frac{2}{4} \right) = \frac{25}{4}.$$

$$3) \int_0^5 x + (1 + x^2)^7 dx + \int_0^5 x - (1 + x^2)^7 dx = \int_0^5 2x dx = x^2 \Big|_0^5 = 5^2 - 0^2 = 25.$$

2.

1) Площадь между графиком $y = f(x) = x^2 - 3x$ и осью x равна $-\int_0^3 x^2 - 3x dx$.

$$2) -\int_0^3 x^2 - 3x dx = -\left(\frac{1}{3} x^3 - \frac{3}{2} x^2 \right) \Big|_0^3 = -\frac{1}{3} (3^3 - 0^3) + \frac{3}{2} (3^2 - 0^2) = \frac{9}{2}.$$

Глава 4

$$1. \quad (\operatorname{tg} x)' = \left(\frac{\sin x}{\cos x} \right)' = \frac{(\sin x)' \cos x - \sin x (\cos x)'}{\cos^2 x} = \\ = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}.$$

2. Так как $(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$, то

$$\int_0^{\pi/4} \frac{1}{\cos^2 x} dx = \operatorname{tg} \frac{\pi}{4} - \operatorname{tg} 0 = 1.$$

3. Вычисляем производную $f'(x) = (x)'e^x + x(e^x)' = e^x + xe^x = (1+x)e^x$.
Приравняв к нулю, находим $f'(-1) = 0$, откуда минимум равен

$$f(-1) = \frac{1}{e}.$$

4. Вводим обозначения $f(x) = x^2$, $g(x) = \ln x$, и интегрируем по частям

$$\int_1^e (x^2)' \ln x dx + \int_1^e x^2 (\ln x)' dx = e^2 \ln e - \ln 1$$

Таким образом,

$$\int_1^e 2x \ln x dx + \int_1^e x^2 \frac{1}{x} dx = e^2,$$

$$\int_1^e 2x \ln x dx = -\int_1^e x dx + e^2 = -\frac{1}{2} (e^2 - 1)^2 + e^2 = \frac{1}{2} e^2 + \frac{1}{2}.$$

Глава 5

1. $f(x) = e^{-x}, f'(x) = -e^{-x}, f^{(2)}(x) = e^{-x}, f^{(3)}(x) = -e^{-x}, 2 - 3.$
 $f(x) = 1 - x + \frac{x^2}{2!} - \frac{x^3}{3!} + \dots$

2. Находим производные

$$f(x) = (\cos x)^{-1}, f'(x) = (\cos x)^{-2} \sin x,$$
$$f^{(2)}(x) = 2(\cos x)^{-3}(\sin x)^2 + (\cos x)^{-2} \cos x = 2(\cos x)^{-3}(\sin x)^2 + (\cos x)^{-1},$$

вычисляем $f(0) = 1, f'(0) = 0, f^{(2)}(0) = 1$ и получаем

$$f(x) = 1 - x + \frac{1}{2!} x^2 - \frac{1}{3!} x^3 + \dots$$

3. Продолжать точно так же, как на стр. 153, повторно дифференцируя $f(x)$.
Так как центр разложения находится в $x = a$, то, подставляя a , находим $c_n s$.
Должно получиться $c_n = 1/n! f^{(n)}(a)$, как в формуле на стр. 157.

Глава 6

1. $f(x, y) = x^2 + 2xy + 3y^2, f_x = 2x + 2y$ и $f_y = 2x + 6y$.

2. Полный дифференциал функции

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{L}{g}} = 2\pi g^{-1/2} L^{1/2} \text{ имеет вид}$$

$$dT = \frac{\partial T}{\partial g} dg + \frac{\partial T}{\partial L} dL = -\pi g^{-3/2} L^{1/2} dg + \pi g^{-1/2} L^{-1/2} dL, \text{ откуда}$$

$$\Delta T \approx -\pi g^{-3/2} L^{1/2} \Delta g + \pi g^{-1/2} L^{-1/2} \Delta L.$$

Подставляя $\Delta g = -0,02g$ и $\Delta L = 0,01L$, получаем

$$\Delta T \approx 0,02\pi g^{-3/2} L^{1/2} g + 0,01\pi g^{-1/2} L^{-1/2} L =$$
$$= 0,03\pi g^{-1/2} L^{1/2} = 0,03 \frac{T}{2} = 0,015T$$

Таким образом, T увеличилась на 1,5%.

3. Пусть $y = h(x)$ является неявной функцией сложной функции $f(x, y) = c$.
Тогда можно записать, что $f(x, h(x)) = c$ вблизи x . Используя цепное правило дифференцирования сложной функции, находим

$$\frac{df}{dx} = 0, \frac{df}{dx} = f_x + f_y h'(x) = 0, \text{ откуда}$$

$$h'(x) = -\frac{f_x}{f_y}.$$

П.2. ОСНОВНЫЕ ФОРМУЛЫ, ТЕОРЕМЫ И ФУНКЦИИ

Линейные уравнения (линейные функции)

Уравнение прямой линии с наклоном m , проходящей через точку (a, b)

$$y = m(x - a) + b.$$

Дифференцирование

Дифференциальные коэффициенты

$$f'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}.$$

Определение производной

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}.$$

Варианты обозначения производной

$$\frac{dy}{dx}, \frac{df}{dx}, \frac{d}{dx}f(x).$$

Производная функции, умноженной на константу

$$\{\alpha f(x)\}' = \alpha f'(x).$$

Производная степенной функций

$$\{x^n\}' = nx^{n-1}.$$

Производная суммы функций

$$\{f(x) + g(x)\}' = f'(x) + g'(x).$$

Производная произведения функций

$$\{f(x)g(x)\}' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x).$$

Производная деления функций

$$\left\{ \frac{g(x)}{f(x)} \right\}' = \frac{g'(x)f(x) - g(x)f'(x)}{\{f(x)\}^2}.$$

Производная сложной функции (цепное правило)

$$\{g(f(x))\}' = g'(f(x))f'(x).$$

Производная обратной функции

Если $y = f(x)$, а $x = g(y)$ то

$$g'(y) = \frac{1}{f'(x)}.$$

Условия экстремумов

Если $y = f(x)$ имеет минимум или максимум в точке $x = a$, то $f'(a) = 0$.

Если $y = f(x)$ возрастает в точке $x = a$, то $f'(a) > 0$.

Если $y = f(x)$ убывает в точке $x = a$, то $f'(a) < 0$.

Теорема о среднем

Для любых a, b ($a < b$) найдётся c ($a < c < b$), для которого:
 $f(b) - f(a) = f'(c)(b - a)$.

Производные основных функций

Тригонометрические функции

$$\{\cos \theta\}' = -\sin \theta,$$

$$\{\sin \theta\}' = \cos \theta.$$

Показательная функция

$$\{e^x\}' = e^x.$$

Логарифмические функции

$$\{\log x\}' = \frac{1}{x}.$$

Интегралы

Определённый интеграл

Если $F'(x) = f(x)$, то

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a).$$

Интеграл суммы функций

$$\int_a^b \{f(x) + g(x)\}dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx.$$

Интеграл функции, умноженной на константу

$$\int_a^b \alpha f(x)dx = \alpha \int_a^b f(x)dx.$$

Интегрирование методом подстановки

Если $x = g(y)$, $b = g(\beta)$, $a = g(\alpha)$,
то

$$\int_a^b f(x)dx = \int_{\alpha}^{\beta} f(g(y))g'(y)dy.$$

Интегрирование по частям

$$\begin{aligned} \int_a^b f'(x)g(x)dx + \int_a^b f(x)g'(x)dx = \\ = f(b)g(b) - f(a)g(a). \end{aligned}$$

Связь интервалов определённых интегралов

$$\int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx = \int_a^c f(x)dx.$$

Разложение в ряд Тейлора

Формула разложения $f(x)$ в ряд Тейлора вблизи точки $x = a$

$$f(x) = f(a) + \frac{1}{1!} f'(a) (x - a) + \frac{1}{2!} f''(a) (x - a)^2 + \\ + \frac{1}{3!} f'''(a) (x - a)^3 + \dots + \frac{1}{n!} f^{(n)}(a) (x - a)^n + \dots$$

Разложение различных функций в ряд Тейлора

$$\cos x = 1 - \frac{1}{2!} x^2 + \frac{1}{4!} x^4 - \dots + (-1)^n \frac{1}{(2n)!} x^{2n} + \dots$$

$$\sin x = x - \frac{1}{3!} x^3 + \frac{1}{5!} x^5 - \dots + (-1)^{n-1} \frac{1}{(2n-1)!} x^{2n-1} + \dots$$

$$e^x = 1 + \frac{1}{1!} x + \frac{1}{2!} x^2 + \frac{1}{3!} x^3 + \frac{1}{4!} x^4 + \dots + \frac{1}{n!} x^n + \dots$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{1}{2} x^2 + \frac{1}{3} x^3 - \frac{1}{4} x^4 + \dots + (-1)^{n+1} \frac{1}{n} x^n + \dots$$

Частные производные

Определение частной производной

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{f(x + \varepsilon, y) - f(x, y)}{\varepsilon}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{f(x, y + \varepsilon) - f(x, y)}{\varepsilon}$$

Полный дифференциал

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy.$$

Частная производная сложной функции (цепное правило)

Если $z = f(x, y)$, $x = a(t)$, $y = b(t)$,
то

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x} \frac{da}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{db}{dt}.$$

ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

А

Антимонопольный закон — 44, 47
Аппроксимация — 26
- функций — 16
Аппроксимирующая функция — 27

Б

Бесконечность — 166
Биномиальное разложение — 148
Биномиальное распределение — 165-167
Бит — 129-130, 132

В

Валовой продукт — 131
- внутренний (ВВП) — 181
Вероятность — 163
Взаимосвязь — 10, 204
Волна — 119
Выгода потребителей — 105
Высота — 83

Г

Глобальное потепление — 80, 210
Годовой темп роста — 133
График функции — 25, 183-185, 188

Д

Дельта — 91
Дефляция — 19-20
Дивиденды — 200
Дифференциальный коэффициент — 39-41, 49, 227
Дифференцирование — 39, 54, 126-127, 140-141, 227
- многочленов — 62
Дуга — 117

З

Закон долговой ямы — 150
Закон антимонопольный — 44, 47
Зарплата — 201-202

И

Идеальный газ — 196
Инвестиции — 211
Интеграл — 106-107, 110-111, 123, 125, 141, 228
- определённый — 93, 95, 111, 228
- суммы функций — 228
Интегрирование — 80, 82, 104, 125, 127, 141
- методом подстановки — 228
- по частям — 228
Интервал — 95
Инфляция — 20

К

Капитал — 200-202
Касательная — 34, 73, 124, 159
Квадратичная функция — 40, 150
Квадратичное приближение — 160, 172

Кобба-Дугласа функция — 181, 201
Композиция функций — 14
Концентрация — 81-86
Координаты — 182-183, 188
Косинус — 116, 118-125, 127, 141
Коэффициент — 35, 72, 75-76, 153, 173, 190
- годового прироста — 131
- дифференциальный — 40-41, 49, 227
Кривая — 138
- предложения — 101-102, 104-105, 210-211
- спроса — 101, 103-105, 210-211
Круг — 117
- сходимости — 152, 157
Кубическое приближение — 160

Л

Линейная функция — 13, 20, 34, 40, 87-88, 111, 149, 192, 195, 198
- двух переменных — 182-183, 189-190
Линейное приближение — 159
Линейное уравнение — 227
Логарифм — 132
- натуральный — 173
Логарифмическая функция — 129-133, 139, 158, 228

М

Максимальная прибыль — 102, 202
Максимум — 64, 197-198, 207-208, 210-211
Маятник — 216
Мгновенный темп роста — 133-134
Минимум — 64, 198
Многочлен — 62, 157
- бесконечной степени — 151-152
Монополия — 54, 58
Монопольный рынок — 55

Н

Наклон — 26, 39, 40, 73, 184-185, 209
Налог — 211
- углеродный — 210
- экологический — 210-211
Налоговое обложение — 210
Натуральное число — 133, 135
Натуральный логарифм — 139, 173
Неявно заданная функция — 216
Нормальное распределение — 164-166, 173-174

О

Обратная функция — 75-76, 132, 136-139, 227
Объём — 83
Окружность — 24, 117, 118
Определённый интеграл — 93, 95, 111, 228
Ортогональная проекция — 124
Ось — 122
Относительная погрешность — 27-30, 39, 41, 190-193
Отрицательные экстерналии — 206

П

Парниковый газ — 79
Первообразная — 90, 141
Плановая экономика — 210
Плоскость — 185, 189
Плотность — 83
Плотность вероятности, функция — 108, 164
Площадь — 83
Погрешность измерений — 164
Показатель степени — 133
Показательная функция — 13, 129-139, 158, 228
Полный дифференциал — 195-196, 205, 216, 229
Постоянная функция — 40
Постоянный множитель — 95
Потепление глобальное — 210
Правило цепное — 204-205
Предложение — 101
Приближение квадратичное — 159, 172
Приближение кубическое — 159
Прибыль — 105, 207
Приращение — 27, 29
Причина и действие — 179
Причинная связь — 13-14
Производная — 30, 32, 39-41, 49, 88, 90-93, 102, 106, 110, 123, 125, 136, 138, 140, 153, 192, 216, 227
- обратной функции — 75
- произведения функций — 53, 56, 227
- сложной функции — 75, 204
- степенной функции — 62, 227
- суммы функций — 48
- функции, умноженной на константу — 227
- частного от деления — 74, 76
Производственные затраты — 103
Производственные отходы — 206
Производство — 202
Пройденный путь — 50
Прямая линия — 184

Р

Рабочая сила — 200
Радан — 117-118, 122
Радиоволна — 115
Радиус — 24, 117
Разложение в ряд Тейлора — 147, 152-159, 229
Распределение биномиальное — 165, 167
Распределение вероятности — 166
- функция — 108
Распределение нормальное — 164-165, 173-174
Рынок монопольный — 55
Рынок свободной конкуренции — 54
Рыночные отношения — 206

С

Свободная конкуренция — 47
Себестоимость — 102
Сигма — 92
Синус — 118-119, 125, 127, 141
Скорость — 50, 106-107, 181

Сложение производных — 47
Сложная функция — 14, 75-76, 140, 189, 205
Спрос — 101
Стандартное отклонение — 168-169
Степенная функция — 62, 140, 227
Сумма производных — 48

Т

Тейлора, разложение в ряд — 148, 152, 154, 157-159
Теорема о среднем — 72, 227
Тригонометрическая функция — 116, 126-127, 158, 228
- использование — 114

У

Углеродный налог — 210
Угол — 117-118, 124
Умножение на константу — 62, 76, 227
Уровень развития технологии — 203
Ускорение — 216
Условия возрастания и убывания функций — 65
Условия экстремумов — 64

Ф

Функция — 8-11, 36, 72, 119, 167, 181-190, 204
- двух переменных — 181-183, 188-190, 197-198, 205, 207-208, 216
- квадратичная — 40, 150
- Кобба-Дугласа — 181, 201
- линейная — 13, 20, 87-88, 149
- логарифмическая — 129, 132-133, 139, 158, 228
- нескольких переменных — 178, 206
- неявно заданная — 216
- нормированная — 167
- обратная — 75-76, 132, 136-139, 227
- плотности вероятности — 108, 164
- показательная — 13, 129-135, 138-139, 158, 228
- постоянная — 40
- распределения вероятности — 108
- сложная — 75-76, 140
- степенная — 62, 140
- тригонометрическая — 158, 228

Ц

Цепное правило — 140, 204-205, 229

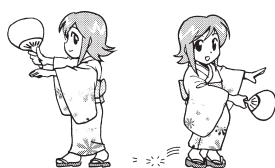
Ч

Частная производная — 189, 191, 193, 196, 199-200, 203-204, 207-209, 229
Частное дифференцирование — 194

Э

Эйлера число — 135
Экологический налог — 210-211
Экономика — 181, 200-201, 203, 211
Экономический рост — 130-131
Экстерналии — 206
Экстремум — 64, 102, 197-199, 202, 207-208, 227
Эффективность экономики — 131

Звучит мудрёно,
а с песней легко!



Косинусы и синусы
в замкнутом кругу –
дифференцирование и
интегрирование я пойму.



Дифферен-
цируем синус –
получаем
косинус!



Интегрируем
косинус –
получаем
синус!



Косинусы и синусы
в замкнутом кругу, так
естественно – решения
дифференциала,
обратные интегралам,
легко найду.



Книги издательства «ДМК Пресс» можно заказать в торгово-издательском холдинге
«Планета Альянс» наложенным платежом, выслав открытку или письмо по почтовому адресу:

115487, г. Москва, 2-й Нагатинский пр-д, д. 6А

При оформлении заказа следует указать адрес (полностью), по которому должны быть

Желательно также указать свой телефон и электронный адрес.

Эти книги вы можете заказать и в интернет-магазине: www.aliants-kniga.ru.

Оптовые закупки: тел. (499) 782-38-89

Электронный адрес: books@aliants-kniga.ru.

Хироюки Кодзима (автор), Син Тогами (художник)

Занимательная математика. Производные и интегралы. Манга

Издательство выражает благодарность *Панфилову В. О.*

Главный редактор *Д. А. Мовчан*

dmkpress@gmail.com

Научный редактор *И. А. Сенников*

Верстальщик *А. Ю. Анненков*

Формат 70×90/16. Бумага офсетная.

Печать офсетная. Объём 15 п. л. Усл. п. л. 17,5.

Тираж 200 экз.

Веб-сайт издательства ДМК Пресс: www.dmkpress.com

ОБРАЗОВАТЕЛЬНАЯ МАНГА



ЗАНИМАТЕЛЬНАЯ МАТЕМАТИКА ПРОИЗВОДНЫЕ И ИНТЕГРАЛЫ МАНГА

НОРИКО — НАЧИНАЮЩИЙ РЕПОРТЁР. ПОСЛЕ ОБУЧЕНИЯ ЕЁ НАПРАВИЛИ В ОДНО ИЗ ОТДЕЛЕНИЙ ГАЗЕТЫ "АСАГАКЭ ТАЙМС". НОРИКО ЖАЖДЕТ ОСВЕЩАТЬ В СВОИХ РЕПОРТАЖАХ САМЫЕ ВОЛНУЮЩИЕ ПРОБЛЕМЫ МИРОВОЙ ПОЛИТИКИ И ЭКОНОМИКИ, НО ХВАТИТ ЛИ ЕЙ ДЛЯ ЭТОГО ОПЫТА И ЗНАНИЙ? ЕЁ НЕПОСРЕДСТВЕННЫЙ НАЧАЛЬНИК, СЭКИ-САН, РЕШИЛ НАУЧИТЬ ЕЁ АНАЛИЗИРОВАТЬ ПРОИСХОДЯЩИЕ В ПОЛИТИКЕ И ЭКОНОМИКЕ СОБЫТИЯ, ИСПОЛЬЗУЯ МАТЕМАТИКУ.

ЧИТАЯ ЭТУ КНИГУ, ВЫ ВМЕСТЕ С НОРИКО БУДЕТЕ ОСВАИВАТЬ ОСНОВЫ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО И ИНТЕГРАЛЬНОГО ИСЧИСЛЕНИЯ И ПОЙМЁТЕ, ЧТО ЭТИ ЗНАНИЯ ПРИГОДЯТСЯ НЕ ТОЛЬКО ДЛЯ ПРОВЕДЕНИЯ СЛОЖНЫХ НАУЧНЫХ РАСЧЁТОВ. ПРИВОДЯ ПРИМЕРЫ ИЗ РЕАЛЬНОЙ ЖИЗНИ, ТАКИЕ КАК ВЕРОЯТНОСТЬ СОБЫТИЙ, КРИВЫЕ СПРОСА И ПРЕДЛОЖЕНИЯ В ЭКОНОМИКЕ, ЗАГРЯЗНЕНИЕ ОКРУЖАЮЩЕЙ СРЕДЫ И ДАЖЕ ПЛОТНОСТЬ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ СПИРТА В СТАКАНЕ, АВТОР ПОКАЗЫВАЕТ, ЧТО ПРОИЗВОДНЫЕ И ИНТЕГРАЛЫ ПОМОГАЮТ ГЛУБЖЕ РАЗОБРАТЬСЯ В САМЫХ РАЗНЫХ ПРОБЛЕМАХ, ВОЗНИКАЮЩИХ В НАШЕЙ ЖИЗНИ.

В ХОДЕ ОБУЧЕНИЯ ВЫ УЗНАЕТЕ:

- ЧТО ТАКОЕ ПРОИЗВОДНАЯ И КАК С ЕЁ ПОМОЩЬЮ ОПРЕДЕЛЯТЬ СКОРОСТЬ ИЗМЕНЕНИЯ ФУНКЦИИ;
- КАК СВЯЗАНЫ МЕЖДУ СОБОЙ ПРОИЗВОДНАЯ И ИНТЕГРАЛ;
- КАК ИНТЕГРИРОВАТЬ И ДИФФЕРЕНЦИРОВАТЬ СЛОЖНЫЕ ФУНКЦИИ;
- ЧТО ТАКОЕ ЧАСТНЫЕ ПРОИЗВОДНЫЕ, И КАК С ИХ ПОМОЩЬЮ НАХОДИТЬ ИНТЕГРАЛЫ И ПРОИЗВОДНЫЕ ФУНКЦИЙ НЕСКОЛЬКИХ ПЕРЕМЕННЫХ;
- КАК С ПОМОЩЬЮ РАЗЛОЖЕНИЯ В РЯД ТЕЙЛора МОЖНО ЗАМЕНИТЬ ТРУДНУЮ ДЛЯ АНАЛИЗА ФУНКЦИЮ СТЕПЕННЫМ МНОГОЧЛЕНОМ.

КНИГА БУДЕТ ПОЛЕЗНА УЧАЩИМСЯ СТАРШИХ КЛАССОВ ШКОЛ, СТУДЕНТАМ ВУЗОВ, А ТАКЖЕ ВСЕМ, КТО ИНТЕРЕСУЕТСЯ МАТЕМАТИКОЙ И ХОЧЕТ, ЧТОБЫ ОБУЧЕНИЕ БЫЛО ЛЁГКИМ И УВЛЕКАТЕЛЬНЫМ.

Интернет-магазин: www.dmkpress.com

Книга-почтой: orders@aliants-kniga.ru

Оптовая продажа: "Альянс-книга"
(499)782-3889. books@aliants-kniga.ru

DMK
ИЗДАТЕЛЬСТВО

ОДЭКА

ISBN 978-5-97060-154-9



9 785970 601549 >

ЗАНИМАТЕЛЬНАЯ МАТЕМАТИКА
ПРОИЗВОДНЫЕ И ИНТЕГРАЛЫ
МАНГА



Хироюки Кодзима
Син Тогами
Becom Co.